ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ КУЛЬТУРИ

ЛАРІОНОВ Ю.І.

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Харків 2010

Викладач___________________
Студент____________________
№ залікової книжки___________

№	Завдання	Оцінка в балах		Підвищення рейтингу	
		Кількість	Підпис	Кількість	Підпис
1	Зведення до канонічної форми загальної задачі лінійного прорамування				
2	Зведення до стандартної форми канонічної ЗЛП				
3	Розв"язування ЗЛП за допомогою геометричної інтерпретації				
4	Розв"язування ЗЛП за допомогою симплекс-методу				
5	Застосування методу штучного базису				
6	Побудова двоїстої задачі до вихідної ЗЛП				
7	Перевірка плану ЗЛП на оптимальність				
8	Перевірка пари векторів на розв"язок прямої та двоїстої до неї задач				
9	Розв"язування ЗЛП за допомогою двоїстої задачі				
10	Розв"язування ЗЛП двоїстим симплекс-методом				
11	Побудова опорного плану Т-задачі				
12	Знаходження розв"язку Т-задачі методом потенціалів				
	Разом				

За кожне завдання 1,2,3,6,7,8,11 максимальна кількість балів – вісім балів.
За кожне завдання 4,5,9,12 максимальна кількість балів – дев"ять балів.
Якщо сумарна кількість балів складає 36-59 виставляється оцінка „задовільно", 60-85 – „добре", 86-100 –„відмінно".

ЗМІСТ

ПРОГРАМНИЙ МАТЕРІАЛ ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ “МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”

Предмет, об”єкт, завдання та методологічні засади дисципліни “Математичне програмування”.Мета вивчення дисципліни, зв”язок з іншими дисиплінами.

Задачі економічного вибору. Економічна та математична постановка оптимі - заційних задач. Сутність звичайної оптимізації.Вибір критерію, функціональних та нефункціональних обмежень задачі.

Класифікація задач математичного програмування.Специфіка задач математичного програмування.

Типи максимумів у задачах математичного програмування.Теорема Вейєршт – расса та теорема про достатні умови глобального максимуму.

Задачі планування економіки та організації виробництва. Застосування математичного програмування в промисловості та транспорті.Застосування математичного програмування в інших галузях.

Економічна та математична постановка задач лінійного програмування (ЗЛП). Система гипотез, що використовується.

Економічні приклади моделей лінійного програмування: задачі та моделі використання сировини та матеріалів, оптимізація виробничої програми, задача про суміши, задача розкрою тощо.

Форми запису задач лінійного програмування- загальна, стандартна та канонічна, їх еквівалентність.Економічне значення додаткових змінних.

Геометрична інтерпретація задач задач лінійного програмування. Основні аналітичні властивості ЗЛП.

Симплексний метод розв”язування ЗЛП (метод послідовного поліпшення плану). Опорний план ЗЛП в канонічній формі запису, базис опорного плану. Симплекс – таблиця, правила її заповнення та алгоритм обробки. Знаходження оптимального плану. Основні теореми симплекс – методу. Метод штучного базису (М – метод).

Виродженість та зациклення в ЗЛП.

Двоїстість (спряженість) у лінійному програмуванні.Форми запису та правила запису пари двоїстих задач.Осноні теореми двоїстості та їх економічний зміст. Зв”язок між розв”язками прямої та двоїстої задач. Критерій оптимальності плану.

Двоїстий симплекс- метод (метод послідовного уточнення оцінок).Поняття про спряжений базис.Псевдоплан задачі.Основні теореми та алгоритм двоїстого симплекс- методу. Властивості застосування двоїстого симплекс – методу.

Транспортна задача (Т – задача).Економічна та математична постановка. Особливості структури транспортної задачі. Умови існування розв”язку Т – задачі. Деякі властивості опорних планів , знаходження опорних планів Т – задачі (метод північно – західного кута, мінімального елемента, подвійних позначок, Фогеля). Виродженість опорного плану.Задача,двоїста до транспортної.Метод потенціалів знаходження розв”язку Т – задачі.Відкриті транспортні задачі.

Т – задача за критерієм часу.

Транспортні задачі з ускладненнями – заборона перевезень, обмеження про – пускних спроможностей маршрутів, двоетапний алгоритм розв”язування.

ІНФОРМАЦІЙНО – МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Базове

1 Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
2 Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Выща шк.,1979.
3 Кузнецов А.В. и др. Высшая математика: математическое программирование. – Мн.: Вышэйш.шк.,1994.
4 Линейное и нелинейное программирование / под ред.И.Н.Ляшенко. – К.: Выща шк.,1975.
5 Степанюк В.В. Методи математичного програмування.-К.: Вища шк.,1984.

Додаткове

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1985.
2 Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.
3 Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969.

4 Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
5 Калихман И.С. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк.,1975.
6 Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования.- Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1976.
7 Коюда П.М., Ларіонов Ю.І. Математичне програмування. – Харків, ХТУРЕ, 1997.
8 Коюда П.М.,Ларіонов Ю.І., Ларіонова Н.Б. Практичне керівництво до розв”я – зання задач математичного програмування.Ч.1. Лінійне програмування.- Харків, ХТУРЕ, 1999.

ПЕРЕЛІК УМІНЬ

№ п/п	Уміння	Алгоритми
1	Зведення до канонічної форми загальної задачі лінійного програмування	1.Перетворення мішаної системи обмежень у систему рівнянь шляхом введення додаткових невід”ємних змінних до лівих частин нерівностей. 2.Введення додаткових змінних у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. 3.Введення умов невідємності змінних: - змінні, не обмежені за знаком, замінюються різницею двох невід”єм – них змінних; -від”ємні змінні замінюються шляхом

		множення на (-1) невід"ємними змін – ними; -змінні, не менші деякого числа, заміюються введенням додаткових невід"ємних змінних. 4.Запис канонічної ЗЛП з обмежен – нями – рівностями та однорідними умовами невід"ємності.
2	Зведення до стандартної форми канонічної задачі лінійного програмування	1.Розділ змінних канонічної задачі на базисні та небазисні (вільні). 2.Вираз базисних змінних через небазисні. 3.Вираз цільової функції через небазисні змінні. 4.Запис стандартної ЗЛП та встановлення її еквівалентності вихідній канонічній задачі.
3	Розв"язування ЗЛП за допомогою геометричної інтерпретації	1.Заміна в обмеженнях – нерівностях знаків нерівностей на знаки рівнянь та побудова на площині відповідних прямих. 2.Визначення півплощин, що відпо - відають кожному обмеженню – нерівності, та відшукання многогранника планів задачі (області допустимих розв"язків) 3.Побудова прямої рівня цільової функції. 4.Паралельне пересування прямої рівня в напрямі зростання (спадання) цільової функції до границі ОДР. 5.Знаходження точки (або точок),де пряма рівня досягає найбільшого (найменшого) значення, або встановлення факту нерозв"язності ЗЛП. 6.Обчислення координат точки розв"язку, яка й буде оптимальним планом задачі, та значення цільової функції.
4	Розв"язування ЗЛП за допомогою симплекс – методу	1.Приведення вихідної ЗЛП до кано – нічної форми запису. 2.Знаходження базису початкового опорного плану. 3.Складання початкової симплекс – таблиці. 4.Проведення аналізу з метою встановлення або оптимальності опорного плану, або нерозв"язності задачі, або переходу до нового опорного плану.

		5.Визначення ведучого стовбця, ведучого рядка та ведучого елемента. 6.Заповнення наступної симплекс – таблиці. 7.Перехід до п.4 даного алгоритму.
5	Застосування методу штучного базису	1.Введення штучних змінних та запис розширеної задачі лінійного програмування (М-задачі). 2.Розв”язання М-задачі за допомогою симплексного методу.
6	Побудова двоїстої задачі до вихідної задачі лінійного програмування	1.Запис вихідної задачі у формі однородних нерівностей та рівностей. 2.Знаходження транспонованої матриці основних обмежень вихідної задачі. 3.Запис двоїстої задачі на підставі правил запису двоїстих задач у загальній формі.
7	Перевірка плану ЗЛП на оптимальність	1.Побудова двоїстої задачі. 2.Розв”язування обмежень двоїстої задачі у формі рівностей, які відпові – дають додатним компонентам плану, що розглядається. 3.Перевірка обмежень двоїстої задачі, що залишилися, на виконання як точних нерівностей.
8	Перевірка пари векторів на розв”язок прямої та двоїстої до неї задач	1.Побудова двоїстої задачі. 2.Перевірка планів на допустимість. 3.Перевірка планів на оптимальність.
9	Розв”язування прямої ЗЛП за допомогою двоїстої задачі	1.Побудова двоїстої задачі. 2.Знаходження розв”язку двоїстої за – дачі. 3.Знаходження розв”язку прямої задачі з умов доповнюючої нежорсткості.
10	Розв”язування ЗЛП двоїстим симплекс – методом	1.Побудова двоїстої задачі. 2.Визначення спряженого базису. 3.Розкладання векторів вихідної задачі за векторами спряженого базису. 4.Запис вихідної ЗЛП за умов спряженого базису. 5.Складання початкової симплекс – таблиці . 6.Перевірка псевдоплану або на оптимальність,або на нерозв”язність задачі, або на перехід до нового псевдоплану. 7.Визначення ведучого рядка,ведучого стовпця та ведучого елементу. 8.Заповнення наступної симплекс – таблиці. 9.Перехід до п.6.

11	Побудова опорних планів транспортної задачі	1.Перевірка виконання балансової умови задачі. 2.Введення фіктивних постачальників або споживачів в разі її невиконання. 3.Запис обмежень Т – задачі у вигляді таблиці – незаповненої матриці пере-везень. 4.Знаходження опорних планів мето – дами північно – західного кута, міні – мального елемента, подвійних позна – чок, Фогеля.
12	Знаходження розв”язку Т – задачі методом потенціалів	1.Запис обмежень Т – задачі у вигляді таблиці. 2.Побудова опорного плану. 3.Перевірка плану на невиродженість та ацикличність. 4.Утворення системи рівнянь для виз – начення потенціалів. 5.Перевірка опорного плану на оптимальність. 6.Перехід до нового опорного плану , ближчого до оптимального. 7.Перехід до п.3. 8.Повторення кроків 3 –7 доти, поки не буде знайдено оптимальний план.

1 ПРЕДМЕТ, ОСОБЛИВОСТІ ТА СФЕРА ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

1.1 Задачі економічного вибору. Економічна та математична постановка оптимізаційних задач

Ринкові умови вимагають від керівників уміння приймати самостійні рішення, навчитися самим формулювати проблеми, що стоять перед ними, розбивати їх на складові, а ті, в свою чергу, на задачі, які розподіляються на конкретні доручення іншим особам. Будь – який керівник фізично не може охопити та тримати в пам”яті всі наявні ресурси, зв”язки та різного роду обмеження на їх використання. За таких умов він не може обгрунтовано вибрати критерій, за яким приймаються рішення, тому прийняті їм в такому разі рішення можуть дати не той результат, на який він очікує. При сучасних масштабах виробництва такі незначні помилки обертаються значними збитками.Тому виникла необхідність застосовувати для аналізу та синтезу економічних ситуацій і систем математичні методи й сучасну обчислювальну техніку.Такі методи об”єднуються під загальною назвою – математичне програму - вання.

Математичне програмування – область математики, що розробляє теорію та чисельні методи розв”язування багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних із обмеженнями на область змінення цих змінних.

Найбільше сучасними й разом с тим найбільше ефективними засобами є побудова математичних моделей процесів та явищ, що вивчаються. Протягом тривалого часу в економічній науці використовувався вельми обмежений арсенал математич - них моделей. Розповсюдження отримали моделі та опис,які використовували алгебраічні співвідношення й позначення. Робилися спроби застосувати для вивчення економічних проблем диференціальне та інтегральне числення. Інакше кажучі, ма – тематичний аппарат, що виник у зв”язку з проблемами математичної фізики та теоретичної механіки, став зостосовуватися й для дослідження та розв”язування економічних задач. Це могло принести користь лише на перших кроках, в подальшому виникла потреба в розбудові математичних методів, спеціально придатних до задач економічного аналізу. Саме тоді з”явився ряд нових математичних дисциплін, таких як математичне програмування. Предметом дослідження математичного програмування є математичні моделі, породні й зв”язані з певними економічними проблемами, що описують економіку підприємства, господарства або окремі економічні процеси в них. В економічних задачах є множина, варіантність можливих рішень : дану або еквівалентну у використанні продукцію можна отримати різними способами, по-різному вибирати технології, сировину, обладнання, організацію процесу.

Одним із найбільше практичних питань економіки є побудова плану на різних рівнях економічної системи – від цеху до народого господарства. Якість плану істотно залежить від прийнятої системи рішень – при вдалому виборі її за менших витрат можна досягти найбільшого ефекту й навпаки.

На перший погляд можна при наявності декілької можливих рішень просто розглянути усі можливості та вибрати найкращу.Але це тільки на перший погляд. Оскільки будь – який план є результатом поєднання елементарних виробничих рішень, то кількість таких комбінацій багатократно множиться й зростає настільки, що навіть в найпростіших задачах перебирання всіляких варіантів може виявитися нездійсненним.

1.2 Вибір критерію оптимізаії, функціональних обмежень задачі. Загальна задача математичного програмування

Розглянемо задачі,які є об”єктом математичного програмування, та визначимо, чим вони характеризуються.Це задачі на знаходження екстремальних значень дея –

ких функціональних залежностей.Справді, кожна система (народне господарство в цілому, окремі його галузі, підприємства, фірми тощо) функціонує заради досягнення певної мети. В ідеальному випадку ступінь її досягнення і вся сукупність дій, що відбуваються в системі і від яких залежить ступінь досягнення мети системи, мають кількісну міру, тобто можуть бути описані математично. Деякі з таких кількісних характеристик бувають незмінними, сталими для певної системи чи певних умов. Позначимо їх $c_k\left(k=\overline{1,\ell}\right)$. Це так звані параметри задачі. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні можна поділити на дві групи: керовані, значення яких можна змінювати (позначимо їх $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$); некеровані, значення яких визначаються комплексом зовнішніх умов (зовнішнім оточенням) або ж параметрами системи $y_r(r=1,\bar{s})$.

За таких умов, як правило, вдається встановити функціональну залежність між деякою величиною $Z,$ якою вимірюється ступінь досягнення мети системи, і незалежними змінними та параметрами системи

$$Z=F\left(x_j,y_r,c_k\right). \tag{1.1}$$

Функція (1.1) є цільовою або ж критерієм ефективності, оскільки її значення є мірою ефективності роботи системи по досягненню певної мети.Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j, які б надавали цільовій функції екстремального значення, тобто слід знайти

$$Z^*=\underset{x_j}{extrem}F\left(x_j,y_r,c_k\right). \tag{1.2}$$

В багатьох задачах цільовою функцією являється показник, оптимальним значенням для якого буде мінімум (наприклад, витрати ресурсів виробництва) або максимум (вироблення продукції у вартісному вигляді).

Проте можливості вибору керованих змінних x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами (енергетичними, матеріальними, людськими, грошовими ресурсами тощо), а також параметрами самої системи. В ідеальному випадку усі ці обмеження можна описати системою математичних рівностей і нерівностей:

$$g_i\left(x_j,y_r,c_k\right)\{\le=\ge\}b_i,\ \ i=\overline{1,m}. \tag{1.3}$$

Залежності (1.3) називають системою обмежень, або системою умов задачі.

Вирази (1.1) та (1.3) і становлять математичну модель системи.

Отже, задача полягає в тому, щоб знайти такі $x_j,\ j=\overline{1,n},$ що функція

$$Z=\underset{x_j}{extrem}\,F\left(x_j,y_r,c_k\right) \tag{1.4}$$

за умов

$$g_i\left(x_j,y_r,c_k\right)\{\le=\ge\}b_i,\ \ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},\ r=\overline{1,s},\ k=\overline{1,\ell}, \tag{1.5}$$

де $F(\bullet)$ – цільова функція (показник якості або ефективності системи); $g_i(\bullet)$, b_i – відповідно функція споживання i-го ресурсу та величина i-го ресурсу.

Задача оптимізації цільової функції (1.4) за умов (1.5), накладених на незалежні змінні, і є загальною задачею математичного програмування. Саме ця задача – об”єкт математичного програмування, а занходження оптимуму цільової функції – його мета. Отже, загальна задача математичного програмування – це задача відшукання умовного екстремуму цільової функції (1.4) при умовах (1.5).

В прикладному розумінні об"єктом математичного програмування є реальні системи, що описуються загальною задачею, а його метою – їх оптимізація.

Будь-який набір змінних $X=(x_1,...,x_n)$, що задовольняє систему обмежень (1.5), називається планом задачі математичного програмування. З економічних або фізичних розумінь на план задачі чи деякі його компоненти, як правило, накладаються умови невід'ємності, іноді – цілочисельності. Множина планів утворює область допустимих розв'язків, або область означення задачі математичного програмування.

План, що надає цільовій функції оптимального значення, називається оптимальним. розв'язків. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування. Оптимальний розв'язок не обов'язково єдиний, можливі випадки, коли буде скінчена або нескінчена множина оптимальних планів.

В теоретичному плані всі задачі математичного програмування можна розглядати як задачі максимізації чи тільки як задачі мінімізації. Справді, кожну задачу максимізації можна звести до задачі мінімізації, змінивши знак цільової функції. Так само, задачі мінімізації можна звести до задач максимізації. Отже, має місце така умова

$$\min F(X^*) = -\max(-F(X^*)), \tag{1.6}$$

де X^* – оптимальний план.

Система обмежень (1.5) може бути сумісною або несумісною. Сумісна система обмежень визначає в n-вимірному точковому (векторному) просторі область означення задачі, інакше, область існування планів задачі. Кожна точка області означення є планом задачі, а сама область є множиною планів задачі, або допустимою множиною. В більшості задач область існування планів задачі обмежена, але трапляються випадки необмеженості множині планів. Це часто зумовлює необмеженість зверху чи знизу цільової функції задачі. Якщо система обмежень задачі несумісна, суперечлива, тоді множина планів задачі не містить жодного плану і буде порожньою.

Останні два випадки не відповідають дійсності і є результатом некоректної постановки задачі дослідження, означаючи або відсутність якогось істотного обмеження, або введення в задачу зайвих насправді неістотних обмежень. Коректність постанови задачі потребує її стійкості в малому, тобто такої її структури, що всякій малій зміні параметрів відповідає мала зміна або незмінність її розв'язку. Ця вимога пов'язана з тим, що параметри будь-якої конкретної задачі визначаються наближено, при цьому задана точність визначення параметрів не повинна виливатися на результаті розв'язання.

1.3 Типи максимумів.Теорема Вейерштрасса. Теорема про достатні умови глобального максимуму

Моделі математичного програмування – це моделі умовної оптимізації. Тому, формуючи та оптимізуючи модель, треба враховувати, що існують різні типи максимумів: глобальний, локальний, строгий (сильний) і нестрогий, умовний і безумовний.

В загальній задачі математичного програмування вектор змінних X^* є точкою глобального максимуму (або розв'язком), якщо він належить області існування планів задачі (1.5) та цільова функція (1.4) набуває на цьому векторі значення не менше ніж в будь-якій іншій допустимій точці:

$$X^* \in G \text{ та } F\left(X^*\right) \geq F(X) \text{ для всіх } X \in G. \tag{1.7}$$

Глобальний максимум є строгим (сильним), якщо цільова функція (1.4) при $X = X^*$ строго більше будь-якого іншого значення функції на допустимій області (1.5), тобто

$$F\left(X^*\right) > F(X) \text{ для всіх } X \in G,\ X \neq X^*. \tag{1.8}$$

Строгий максимум завжди єдиний.

Теорема Вейєрштрасса формулює умови існування глобального максимуму.

Теорема Вейєрштрасса. Нехай допустима множина G компактна (тобто обмежена і замкнена) і непорожня. Тоді неперервна цільова функція $F(X)$, яка означена на цій множині, досягає глобального максимуму на внутрішній або межовій точці множини G.

Умови теореми є достатніми, але не необхідними.

Вектор змінних X^* є точкою локального максимуму, якщо він належить допустимій множині та на ньому досягається значення цільової функції більше або рівне значенням функції в деякому малому околі цього вектора:

$$X^* \in G \text{ та } F\left(X^*\right) \geq F(X) \text{ для всіх } X \in G \bigcap N_\varepsilon\left(X^*\right), \tag{1.9}$$

де $N_\varepsilon(X^*) - \varepsilon$ – окіл вектора X^*, в даному випадку множина точок X, що задовольняє умові

$$|X - X^*| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x_j^*\right)^2} \leq \varepsilon \tag{1.10}$$

для будь-якого малого додатного числа ε.

Локальний максимум X^* є строгим, якщо значення цільової функції в точці X^* є найбільшим значенням, яке досягає цільова функція в деякому малому околі:

$$F\left(X^*\right) > F(X) \text{ для всіх } X \in G \cap N_\varepsilon(X^*),\ X \neq X^*. \tag{1.11}$$

Очевидно, глобальний максимум є локальним, зворотне ствердження – невірним, бо можуть існувати інші локальні максимуми, на яких цільова функція приймає більші значення.

Теорема (достатні умови глобального максимуму). Нехай допустима множина непорожня, компактна й опукла, а неперервна цільова функція $F(X)$ вгнута на G. Тоді локальний максимум є глобальним, а множина точок, на якій досягається максимум, буде опуклою.

Якщо функція $F(X)$ є строго вгнутою, то розв'язок єдиний, тобто існує єдиний глобальний максимум.

Ефективним засобом отримання оптимальних розв'язків у моделях математичного програмування є використання поверхонь (ліній) рівня цільової функції та напряму найшвидшого змінення цих функцій. В економіко-математичних моделях споживання ці поверхні (лінії) відомі як поверхні (лінії) байдужості. У моделях виробництва лінії рівня постійного випуску називаються ізоквантами.

В загальному випадку поверхнею (лінією) рівня цільової функції називають множину точок евклідового простору, для якої значення функції однакові, тобто

$$\{X \in E_n, \quad F(X) = const\}. \tag{1.12}$$

Напрям найшвидшого зростання визначає напрям, вздовж якого швидкість збільшення цільової функції максимальна. Він задається градієнтом-вектором, який утворений першими частинними похідними цільової функції

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(X)}{\partial x_n} \right). \tag{1.13}$$

Отже, геометрично в моделях математичного програмування треба відшукати точку або множину точок із допустимої множини, на якій досягається сама верхня поверхня (лінія) рівня, що розташована далі інших у напрямі швидшого зростання.

Різні константи породжують різні поверхні (лінії) рівня. Змінюючи константи, отримуємо множину поверхонь (ліній) рівня.

Якщо вважати, що цільова функція неперервна, а допустима множина замкнена, то у відповідності до теореми Вейєрштрасса оптимальний розв'язок існує тоді, коли допустима множина буде не порожньою та обмеженою.

1.3 Класифікація задач математичного програмування

Класифікація задач математичного програмування залежить від критерію, згідно з ким вона проводиться. Маючи на увазі застосування математичних методів в управлінні виробництвом, організаційними системами, економіці тощо, можна було б провести класифікацію за якісно відмінними між собою типами процесів.Однак математичне програмування передусім строго математична дисципліна і тому критеріями класифікації мають бути в основному математичні структури (властивості) задач та методів їх розв'язування. Нижче дається певна математична класифікація розглядуваних далі задач. Зауважимо, що та сама задача з погляду різних математичних критеріїв може належати до кількох класів, оскільки кожен критерій підкреслює лише одну якість задачі на противагу деякій іншій.

При побудові класифікаційної схеми задач математичного програмування вони насамперед поділяються на два великих класи: класичні та некласичні. Основною ознакою такого розподілу є диференційованість цільової функції (1.4) та обмежень (1.5).

1. Класичні задачі математичного програмування – це такі, що задовольняють сукупності ознак:

а) неперервність (1.4) та (1.5) та існування в них неперервних частинних похідних до другого порядку включно;

б) відсутність серед обмежень (1.5) обмежень-нерівностей, що вимагає виконання умови $m < n$;

в) відсутність обласних обмежень виду $x_j \geq d_j$ та вимог невід'ємності змінних $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}$;

г) відсутність вимог дискретності змінних.

Класичні задачі поділяють на два підкласи:

1а. Задачі відшукання безумовного екстремуму. Математична модель задачі має вигляд

$$Z = F\left(X\right) \to extrem, \tag{1.14}$$

де $X = (x_1, x_2, \ldots.., x_n)$.

1б. Задачі відшукання умовного екстремуму. Модель задачі може бути записана у формі:

$$Z = F(X) \to extrem,$$
$$g_i(X) = b_i, \ \ i = \overline{1,m}, \quad n < m. \tag{1.15}$$

2. Некласичні задачі математичного програмування. В цих задачах поряд з обмеженнями (1.5) звичайно присутня вимога невід’ємності всіх або деяких компонентів вектора X:

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n_1}, \ \ n_1 \leq n. \tag{1.16}$$

Некласичні задачі поділяють на два підкласи: спеціальні та неспеціальні. До перших відносяться такі, для яких розроблені спеціальні (непрямі) методи розв’язку залежно від властивостей функцій (1.4) та (1.5).

Перелічимо основні типи спеціальних некласичних задач математичного програмування.

1. Задачі лінійного програмування (ЗЛП). Загальну модель ЗЛП можна зобразити у вигляді:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{1.17}$$

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq = \geq\} b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{1.18}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,s}, \quad s \leq n, \tag{1.19}$$

де c_i, b_i, a_{ij} – задані сталі величини.

Методи та моделі лінійного програмування широко використовуються при розробці виробничих програм підприємств, розподілу їх між виконавцями, при визначенні найкращого об’’єму партії постачання, розміру запасів, розподілу обмежених ресурсів, розміщенні асортименту продукції, що виробляється, при плануванні вантажопотоків, визначенні плану товарообігу та його розподілу, при розв’язанні задач економії ресурсів (вибір ресурсозберігаючих технологій, складання сумішей, розкрій матеріалів) тощо.

2. Всі задачі, що не зводяться до (1.17) – (1.19) є задачами нелінійного програмування. Методи та моделі нелінійного програмування отримали широке застосування при розрахунку економічно вигідних партій запуску деталей у виробництво, при визначенні економічно вигідної партії постачання, розподілу обмежених ресурсів, розміщенні виробничих сил, у тарному господарстві і т. ін.

3. Серед задач нелінійного програмування найбільш вивчені задачі опуклого програмування. В них цільова функція (1.4) вгнута а функції обмежень (1.5) – опуклі.

4. В свою чергу серед задач опуклого програмування докладно досліджені задачі квадратичного програмування, математичні моделі яких мають вигляд

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j \to \max, \tag{1.20}$$

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{1.21}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}, \tag{1.22}$$

де c_j, d_{kj}, a_{ij}, b_i – задані сталі величини.

5. Задачі сепарабельного програмування. Математична модель задачі така

$$F(X)=\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \quad \text{або} \quad \prod_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)\right\}\to \max, \tag{1.23}$$

$$g_i(X)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\left(x_j\right)\le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{1.24}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{1.25}$$

Ці задачі розв'язуються як методами динамічного програмування, якщо процес виробки розв'язку має багатокроковий характер, так і шляхом кусково-лінійної апроксимації, що дозволяє використати апарат лінійного програмування.

6. Задачі дискретного програмування. Сюди можна віднести будь-яку задачу математичного програмування, в якій змінні набувають значення деякої дискретної, насамперед обумовленої, числової множини.

7. Задачі дробово-лінійного програмування, математичні моделі яких мають вигляд

$$F(X)=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}\to \max, \tag{1.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{1.27}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{1.28}$$

де c_j, d_j, b_i, та a_{ij} – деякі сталі числа.

8. Задачі параметричного програмування, в яких цільова функція та функції обмежень залежать від деякого параметра.

9. Задачі стохастичного програмування, в яких цільова функція та (чи) обмеження мають імовірнісний зміст.

Наведена класифікація не є остаточною, бо з'явилися інші типи задач, які враховують специфіку цільової функції та системи обмежень: блочного, багатоіндексного, булівського, нескінченновимірного програмування тощо.

1.5 Приклади економічних проблем, які доцільно роз”язувати, використовуючи моделі та методи математичного програмування

Математичне програмування застосовується в найрізноманітніших галузях свідомої діяльності людей. За допомогою відповідно сформульованих задач можна розв”язувати такі питання: оптимізація міжгалузевих зв”язків, оптимальне використання ресурсів виробництва, оптимальна організація технологічного процесу,оптимальний вибір факторів виробничої функції, оптимальний розмір закуповуваних партій товарів, оптимальний склад сумішей, оптимальний розподіл капітальних вкладень, оптимальне використання виробничих потужностей, оптимальний розкрій матеріалів, оптимальне використання транспортних засобів та закріплення постачальників за споживачами, оптимальне розміщення роздрібної торгівельної мережі, визначення оптимальних кормових раціонів, оптимальна структура посівних площ, оптимальна переробка нафти та утворення нафтопродуктів з наперед заданими якостями тощо.

Широко застосовуються методи математичного програмування у військовій справі, де можна використовувати відповідні моделі наведених вище задач, а також у вугільній, хімічній, паперово – целюлозній, будівельній галузях, важкій промисловості, швейній і взуттєвій галузях легкої промисловості, харчовій промисловості. Методи математичного програмування використовуються при спорудженні геодезичних мереж, у геології для розвідки корисних копалин, для оптимізації технічних конструкцій, у диспетчерській справі і т.п.

Доцільно зазначити, що за своїм реальним змістом як усі наведені в цьому розділі, так і більшість інших задач математичного програмування є задачами або максимізації випуску продукції (прибутку) при заданих обмежених кількостях ресурсів, або ж мінімізації витрат ресурсів на виробництво заданих кількостей продукції.

2 ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДЕЯКІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ”ЯЗУВАННЯ

2.1 Економічна та математична постановка задач лінійного програмування (ЗЛП)

Лінійне програмування – найбільш розроблений і вживаний розділ математичного програмування.

Це пояснюється тим, що

– оптимізаційні моделі економічних систем широкого класу можуть бути достатньо точно складені на основі використання лінійних співвідношень;

– багато з розв'язаних задач лінійного програмування знайшли практичне застосування;

– нелінійні моделі багатьох економічних систем після ряду припущень можуть наближено розглядатися як лінійні, що дозволяє використовувати ефективні обчислювальні методи.

Основними припущеннями, що приймаються при створені лінійних моделей є:

– пропорційність,

– адитивність,

– невід'ємність.

Пропорційність означає витрати ресурсів на деякий вид виробничої діяльності, а також внесок цього виду виробничої діяльності у цільову функцію прямо пропорційні його об'єму виробництва. З другого боку, адитивність указує на те, що загальна величина ресурсів, що споживаються в системі всіма видами виробничої діяльності, дорівнює сумі витрат ресурсів на окремі види виробничої діяльності. Аналогічно інтерпретується і цільова функція. Ці припущення забезпечують строгу лінійність відповідних функцій.

Невід'ємність означає, що ані одному із видів виробничої діяльності не можна приписати від'ємний об'єм виробництва, це є природним логічним наслідком умов функціонування економічних систем. Ці обмеження мають основне значення в теорії задач лінійного програмування та побудові алгоритмів їх розв'язування, і тому їх завжди виділяють в окрему групу умов. Однак інколи в реальних ситуаціях на змінні або не можна накласти обмеження за знаком, або навіть слід прийняти умову недодатності деяких змінних.

Лінійне програмування вивчає задачу відшукання екстремуму лінійної функції кількох змінних при лінійних обмеженнях на змінні у вигляді рівнянь або нерівностей. За типом розв'язуваних задач його методи розділяються на універсальні та спеціальні. За допомогою універсальних методів можна розв'язати будь-яку задачу лінійного програмування (ЗЛП). Спеціальні методи враховують особливості моделі задачі, її цільової функції та системи обмежень.

Особливістю задач лінійного програмування є те, що екстремуму цільова функція досягає на границі області допустимих розв'язків, а опуклість останньої гарантує, що локальний екстремум співпадатиме з глобальним.

Наведемо економічні приклади задач лінійного програмування.

Задача оптимального використання ресурсів виробництва.

Деяка виробнича одиниця (мале підприємство, фірма тощо), виходячи з кон'юнктури ринку, технічних та технологічних можливостей і наявних ресурсів, може випускати n різновидів продукції (товарів), позначених індексом $j\,(j=\overline{1,n})$. Підприємство обмежується існуючими видами ресурсів, технологій, інших виробничих факторів (сировини, напівфабрикатів, обладнання і т. ін.), які називають інгредієнтами. Нехай їх число дорівнює m. Припишемо їм індекс i $(i=\overline{1,m})$. Вони обмежені, їх кількість дорівнює b_i умовних одиниць. Відомі технологічні коефіцієнти α_{ij}, які показують, скільки одиниць i-го ресурсу використовується при виробництві одиниці продукції j-го виду. Відома економічна вигода (ціна товару, його прибутковість, витрати виробництва і т. ін.), за яку можна прийняти, наприклад, ціну реалізації $c_j\,(j=\overline{1,n})$. Якщо позначити через $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – план виробництва (в яких об'ємах і який товар виробляти), то за умови максимуму об'єму реалізації модель буде такою:

знайти

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{2.1}$$

за умов

$$g_i(X)=\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0\ ,\ j=\overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Задача оптимального вибору технологій. Нехай при виробництві певного продукту необхідно використовувати n технологій. При цьому необхідно m видів ресурсів, заданих об'ємами b_i ($i=\overline{1,m}$). Ефективності технологій $c_j\,(j=\overline{1,n})$ та витрати i-го ресурсу в одиницю часу за j-ю технологією a_{ij} відомі. Якщо через x_j позначити інтенсивність використання j-ї технології, то задача полягає у відшуканні такого плану $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, що забезпечує максимум випуску продукції у вартісному виразі

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{2.4}$$

при обмеженнях на лімітовані ресурси

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

та умовах невід'ємності

$$x_j \ge 0\ ,\ j=\overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Математична модель задач про суміші (задачі про дієту) записується у виді:

знайти раціон мінімальної вартості

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad (2.7)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \, i = \overline{1,m}, \quad (2.8)$$

$$x_j \ge 0 \, , \; j = \overline{1,n}, \quad (2.9)$$

де c_j – ціна одиниці продукту j-го виду, x_j – кількість продукту під номером j, n – кількість таких продуктів за умови, що в раціоні повинно утримуватися не менше b_i поживної речовини з номером i, $i = \overline{1,m}$, a_{ij} –кількість i-ї речовини в одиниці j-го продукту.

Задача про розкрій. У загальному виді математична модель задачі записується так:

знайти мінімальну кількість листів, що розкроюються,

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min, \quad (2.10)$$

за умови задоволення асортиментного попиту споживачів

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \; i = \overline{1,m}, \quad (2.11)$$

та умов невід'ємності

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}, \quad (2.12)$$

де x_j – кількість листів, що розкроєні за j-м способом; a_{ij} – кількість заготовок i-го типу при j-му способі розкрою, b_i – задана кількість заготовок i-го типу.

Транспортна задача. Якщо на m базах постачання зосереджено вантаж у кількості $a_i (i = \overline{1,m})$ одиниць однорідного продукту (вугілля, цукру, солі тощо), який треба повністю розвести в n пунктів призначення у кількості $b_j (j = \overline{1,n})$, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad (2.13)$$

а математична модель набуває вигляду:

знайти мінімальне значення транспортних витрат

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \quad (2.14)$$

за умов, що весь продукт треба вивести від постачальників

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m}, \quad (2.15)$$

та повністю задовольнити попит споживачів

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n} \quad (2.16)$$

і природних обмежень

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \quad (2.17)$$

що не допускають зворотних перевезень. Тут x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозиться від пункту i в пункт j, а c_{ij} – вартість доставки одиниці вантажу за тим же маршрутом.

Приклад. Підприємство виробляє два види фарби: для зовнішніх та внутрішніх робіт. Для виробництва кожної фарби використовується два види сировини: А і В, максимально можливі добові запаси яких складають відповідно 6 та 8 тонн. Для виробництва однієї тонни фарби для зовнішніх робіт треба одну тонну сировини А і дві тонни сировини В, а для фарби для внутрішніх робіт – дві тонни сировини та одну тонну сировини В. Маркетингові дослідження ринку показали, що попит на фарбу для внутрішніх робіт не перевищує попиту на фарбу для зовнішніх робіт більше ніж на одну тонну. Крім того, попит на фарбу для внутрішніх робіт не перевищує дві тонни на добу. За реалізацію фарбі підприємство отримує прибуток: за одну тонну фарбі для внутрішніх робіт 2000 грн., а зовнішніх робіт – 3000 грн.

Скласти програму виробництва фарбі, яка забезпечує підприємству максимальний прибуток.

Розв'язання. *Змінні.* Оскільки треба визначити обсяги виробництва кожного виду фарби, змінними моделі є: x_1 – добовий обсяг виробництва фарби для внутрішніх робіт (у тоннах), x_2 –добовий обсяг виробництва фарби для зовнішніх робіт(у тоннах).

Цільова функція. Оскільки прибуток від реалізації однієї тонни фарби для внутрішніх робіт складає 2000 грн., то добовий прибуток становитиме $2x_1$ тис.грн.. Аналогічно прибуток від реалізації x_2 тонн фарби для зовнішніх робіт складе $3x_2$ тис. грн. на добу.

Позначимо загальний прибуток (у тис. грн.) через Z. Тоді можна дати таке математичне формулювання цільової функції: визначити такі значення x_1 і x_2, які максимізують величину загального прибутку

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

Обмеження. Обмеження на витрати вихідних продуктів можна записати так

Витрати вихідної сировини для виробництва обох видів фарби ≤ Максимально можливий запас даної вихідної сировини

Це призводить до такого математичного запису обмежень:

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \text{ (для сировини А)},$$

$$2x_1 + x_2 \le 8 \text{ (для сировини В)}.$$

Обмеження на обсяг попиту мають вигляд:

| Перевищення попиту на фарбу для внутрішніх робіт відносно попиту на фарбу для зовнішніх робіт | ≤ 1 тонни.

| Попит на фарбу для зовнішніх робіт | ≤ 2 тонн.

Математично ці обмеження записуються так:

$$-x_1 + x_2 \le 1,$$

$$x_2 \le 2.$$

Неявне обмеження полягає в тому, що обсяги продукції не можуть приймати від"ємних значень, тому поставимо вимогу виконання умов невід"ємності змінних, тобто введемо обмеження на цей знак:

$$x_1 \ge 0,$$

$$x_2 \ge 0.$$

Остаточно математична модель задачі має вигляд:

знайти

$$maxZ=2x_1+3x_2$$

за умов

$$x_1+2x_2\le 6,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1\ge 0,$$
$$x_2\ge 0.$$

2.2 Форми запису ЗЛП: загальна, стандартна, канонічна. Еквівалентність різних форм запису задачі

Розглянуті приклади дозволяють сформулювати загальну задачу лінійного програмування. Вона є задачею на знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень, що містить як рівності, так і нерівності обох знаків, і при невідомих змінних, з яких одні зв'язані умовами невід'ємності або недодатності, а на знак решти жодних умов не накладено. Задача має вигляд:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to (\textit{екстрем:}\ \max/\min), \tag{2.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i=\overline{1,k}, \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\quad i=\overline{k+1,\ l}, \tag{2.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\quad i=\overline{l+1,m}, \tag{2.21}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,r},\quad x_j\le 0,\quad j=\overline{r+1,s},\quad s<n. \tag{2.22}$$

У стандартній задачі треба знайти екстремум цільової функції за умов наявності системи обмежень-нерівностей та невід'ємності всіх змінних, тобто

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to (\textit{extrem}:\ \max/\min), \tag{2.23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\quad i=\overline{1,l}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\quad i=\overline{\ell+1,\ m},$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}. \tag{2.25}$$

Загальна та стандартна форми задачі лінійного програмування важливі тому, що більшість виробничо-економічних ситуацій цілком природно зводяться до такого виду моделей.

Задачею у канонічній формі запису називають задачу, в якій треба знайти максимум (мінімум) функції за умов обмежень – рівностей і невід'ємності усіх змінних:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to (\textit{extrem:}\ \max/\min), \tag{2.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{2.27}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.28}$$

Якщо кожне обмеження – рівність у канонічній формі має змінну, яка входить до лівої частини з коефіцієнтом, рівним одиниці, а в усі інші з коефіцієнтом, рівним нулю (за умови, що $b_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}$), то така система обмежень зображена у переважній формі запису .

Найбільше поширені методи розв'язання ЗЛП застосовуються лише для задач, що записані саме в канонічній формі. Тому виникає потреба в переході від будь-якої форми ЗЛП до її канонічного виду, причому треба бути впевненим, що ці форми еквівалентні.

Розглянемо спосіб переходу від загальної форми ЗЛП до канонічної У системі обмежень-нерівностей типу ≤ додаємо нову невід'ємну змінну $x_{n+i} \ge 0,\ (\overline{i = k+1, l})$ до кожної лівої частини нерівностей, перетворюючи їх на рівняння. Цього самого результату досягаємо, віднімаючи від кожної лівої частини нерівностей типу ≥ нову невід'ємну змінну $x_{n+i} \ge 0,\quad \left(\overline{i = l+1, m}\right)$, перетворюючи їх теж на рівняння. Додаткові змінні $x_{n+i}\ (\overline{i = k+1, m})$ у цільову функцію вводяться з коефіцієнтами, які дорівнюють нулю. Зауважимо, що умову ≥ легко звести до виду ≤, помноживши кожну нерівність на (–1). Аналогічно умови $x_j \le 0,$ зводять ся до умов $x_j \ge 0,$ множенням на (–1) та заміною змінних $x_j' = -x_j \ge 0,\ j = \overline{r+1, s}.$ Кожну змінну, на знак якої не накладено обмежень, можна подати у вигляді різниці двох невід'ємних змінних $x_j = x_j' - x_j''$, де $x_j' \ge 0,\quad x_j'' \ge 0,\quad j = \overline{s+1, n},$ а змінну $x_j \ge d_j$, де $d_j \ne 0$, як $x_j = d_j + x_j'$, де $x_j' \ge 0.$

Теорема. Для кожного допустимого розв'язку $(x_1,..., x_n)$ загальної ЗЛП знайдеться допустимий розв'язок відповідної канонічної задачі. Навпаки, кожному допустимому розв'язку $(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}', \ldots, x_s', x_{s+1}', x_{s+1}'', \ldots, x_n', x_n'')$ канонічної ЗЛП відповідає певний допустимий розв'язок загальної задачі. При цьому значення цільових функцій цих задач збігаються.

Звідси можна зробити висновок, що цільові функції загальної задачі та її канонічної форми на множині відповідних допустимих розв'язків досягають екстремального значення разом, а кожному оптимальному розв'язку $\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ відповідає оптимальний розв'язок $(x_1^*,\ \ldots,\ x_r^*,\ x_{r+1}'^*, \ldots, x_s'^*, x_{s+1}'^*, x_{s+1}''^*, \ldots, x_n'^*, x_n''^*)$.

Відзначимо економічне значення додаткових змінних x_{n+i}. У кожній задачі вони напряму зв'язані з її економічним змістом. Так, для задачі (2.1)-(2.3) про оптимальне використання ресурсів

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ \ i = \overline{1, m}, \tag{2.29}$$

тобто додаткова змінна показує величину невикористаного ресурсу. Для задачі про суміші (2.7)-(2.9)

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i,\ \ i = \overline{1, m}, \tag{2.30}$$

тобто додаткова змінна показує споживання відповідної поживної речовини понад норму.

Іноді виникає потреба здійснити перехід до стандартної форми запису.

Нехай ранг системи обмежень (2.27) $r < n$, тоді k = (n - r) змінним можна надавати будь-які значення (це так звані небазисні змінні), а r змінних можна лінійно виразити через них (ці r змінні називають ще базисними).

Без втрати загальності можна вважати небазисними (вільними) змінними $x_1,..., x_k$, а решту – базисними $x_{k+1},..., x_n$. Тоді систему обмежень канонічної ЗЛП (2.27), наприклад, методом виключення Гаусса, можна подати у вигляді

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_j \ , \ i = \overline{k+1, n}, \qquad (2.31)$$

а цільову функцію (2.26) виразити тільки через вільні змінні

$$Z = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j x_j, \qquad (2.32)$$

де $\alpha_{ij}, \beta_i, \gamma_o, \gamma_j$ – деякі коефіцієнти. Оскільки ЗЛП вимагає тільки допустимих (невід'ємних) змінних, тобто $x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n},$ то $x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, ..., x_k \geq 0,$

$$\beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1} \quad x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k \geq 0,$$

$$(2.33)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_n + \alpha_{n1} x_1 + ... + \alpha_{nk} x_k \geq 0.$$

Таким чином, від системи лінійних обмежень-рівностей (2.27) відносно n невідомих приходимо до системи n лінійних обмежень-нерівностей (2.33) відносно k невідомих. Отже задача (2.26)-(2.28) є стандартною формою вихідної канонічної задачі (2.32)-(2.33).

Приклад 1. Фірма "Мотор" планує відкрити магазин оптової торгівлі для реалізації лічильників води, пилососів та молочних сепараторів. Для цього можна використати до 450 м^2 корисної площі приміщень із урахуванням коефіцієнта оборотності, та витрати робочого часу працівників – до 600 люд.-год. Товарообіг планується на рівні не менше 240 тис. грн. Витрати ресурсів на реалізацію та прибуток, який можна отримати при цьому наведені в таблиці.21.

Таблиця 2.1

Ресурси	Витрати на реалізацію, тис. грн.		
	Лічильники	Пилососи	Сепаратори
Корисна площа, м^2	1	2	3
Робочий час, люд.–год.	2	3	1,5
Прибуток, тис. грн.	55	60	70

Побудуємо економіко-математичну модель, на підставі якої можна сформулювати оптимізаційну задачу визначення плану товарообігу, що забезпечує максимальний прибуток.

Запишемо канонічну форму задачі та дамо пояснення щодо економічного змісту додаткових змінних.

Позначимо через x_1, x_2, x_3 об'єму продукції (в тис. грн.), яку треба реалізувати. Модель задачі можна записати так

$$Z = 55x_1 + 60x_2 + 70x_3 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 450,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1,5x_3 \leq 600,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 240,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Перейдемо до задачі в канонічній формі запису. Введемо додаткові змінні x_4, x_5, x_6,перші дві із яких додамо до лівих частин перших двох нерівностей, а третю віднімемо з лівої частини третьої нерівності. В цільову функцію всі додаткові змінні введемо з нульовим коефіцієнтом. Отримаємо канонічну форму задачі:

$$Z = 55x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 450,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3 + x_5 = 600,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 240,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Додаткові змінні мають такий економічний зміст: $x_4 = 450 - x_1 - 2x_2 - 3x_3$ показує об'єм недовикористання корисної площі приміщень, $x_5 = 600 - 2x_1 - 3x_2 - 1{,}5x_3$ об'єм недовикористання робочого часу працівників, а $x_6 = x_1 + x_2 + x_3 - 240$ об'єм перевищення товарообігу.

Приклад 2. Зведемо до стандартної форми запису таку канонічну ЗЛП і доведемо еквівалентність цих задач.

$$Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$

$$4x_1 + x_3 + x_4 = 16,$$

$$6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

В наведеній задачі число зміни n=4, а ранг системи обмежень r = 2. Виберемо за базисні змінні, наприклад x_3 та x_4 і виразимо їх через небазисні (вільні) змінні x_1 та x_2:

$$x_3 = 6 + x_1 - 2x_2,$$

$$x_4 = 10 - 5x_1 + 2x_2.$$

Оскільки x_3 та x_4 невід'ємні, то

$$6 + x_1 - 2x_2 \geq 0,$$

$$10 - 5x_1 + 2x_2 \geq 0.$$

Цільова функція набуде такого значення

$$Z' = x_1 + x_2 + 16.$$

Запишемо тепер задачу в стандартній формі

$$Z' = x_1 + x_2 + 16,$$

$$-x_1 + 2\,x_2 \leq 6,$$

$$5x_1 - 2\,x_2 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Якщо ж за вільні змінні вибрати x_3 і x_4, а за базисні – x_1 і x_2, то тоді

$$x_1 = \frac{16 - x_3 - x_4}{4},$$

$$x_2 = \frac{40 - 5x_3 - x_4}{8},$$

а цільова функція буде такою

$$Z'' = \frac{200 - 7x_3 - 3x_4}{8} \to \max.$$

Отже еквівалентна стандартна задача матиме вигляд:

$$Z'' = \frac{200 - 7x_3 - 3x_4}{8} \to \max,$$

$x_3 + x_4 \le 16,$
$5x_3 + x_4 \le 40,$
$x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$

Нехай у першій стандартній задачі $x_1 = 4,\ x_2 = 5$, тоді $x_3 = x_4 = 0,$ а Z' набуває значення 25.

Якщо ж у другій формі покласти $x_3 = x_4 = 0,$ то тоді $x_1 = 4,\ x_2 = 5.$ При цьому Z''=25.

Отже, вектор x = (4, 5, 0, 0) задовольняє умовам вихідної задачі, причому Z = 25.

Таким чином, всі форми запису наведених задач еквівалентні.

В подальшому для простоти вважатимемо систему рівнянь канонічної ЗЛП незалежною: при цьому ранг системи r дорівнює числу рівнянь m.

Таким чином, коли ранг системи (2.27) менше за число змінних $n,$ то система має незлічену множину розв'язків. Якщо серед них немає жодного, для якого всі $x_1, x_2, ..., x_n$ невід'ємні, це означає, що ЗЛП не має допустимих розв'язків. Якщо ж існують розв'язки, для яких всі $x_1, x_2, ..., x_n$ невід'ємні, то кожний з них є допустимим. Серед них треба знайти оптимальний, для якого функція (2.26) досягає екстремуму.

2.3 Геометрична інтерпретація ЗЛП. Основні властивості задач лінійного програмування

Геометрична інтерпретація дає можливість наочно зобразити структуру ЗЛП, та виявити їх основні властивості. У найпростіших випадках геометричне зображення дає змогу знайти розв'язок задачі у стандартній формі у випадках одно- і двовимірного просторів. Також можна надати геометричну інтерпретацію задачі в канонічній формі з числом незалежних змінних $k = n - m \le 2$, де n – загальне число змінних вихідної задачі, а m – число її обмежень, та задачі у загальній формі запису, яка може бути зведена до визначеної канонічної форми запису ЗЛП.

В якій би формі не розглядалася ЗЛП, кожне обмеження-рівняння визначає деяку гіперплощину (лінію) в просторі основних змінних, кожне обмеження – нерівність, включаючи і обмеження за знаком, визначає також деяку площину та півпростір, що лежить по один бік від цієї площини (лінії). Перетин усіх цих опуклих множин дає опуклий многогранник, або опуклу многогранну множину G допустимих розв'язків систем основних обмежень ЗЛП (область допустимих розв'язків – ОДР).

Теорема. Множина планів ЗЛП опукла.

Лінійну форму можна також інтерпретувати у просторі основних змінних як сім'ю деяких паралельних гіперплощин (ліній) рівня. Виходячи з цього, ЗЛП можна дати таку інтерпретацію: серед гіперплощин (ліній) цільової функції, які мають спільні точки з многогранником планів задачі, знайти найбільш (або найменш) віддалену від початку координат, причому слід враховувати не лише її абсолютну величину, а й знак відстані. Ці шукані гіперплощини (лінії) мають лише доторкатися до многогранника допустимих розв'язків по одній з його границь – точці, ребру, грані.

Для випадку двох змінних напрям зростання цільової функції вздовж даної осі визначають частинні похідні

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = c_2. \tag{2.34}$$

Вектор $C = (c_1,\ c_2)$ називається градієнтом функції, він вказує напрям найскорішого зростання цільової функції. Цей вектор перпендикулярен до прямих $Z = const$ сім'ї $c_1 x_1 + c_2 x_2 = Z.$

Вектор ($-C$) вказує напрям найскорішого спадання цільової функції, його називають антиградієнтом.

Алгоритм геометричної інтерпретації ЗЛП містить такі етапи:

1. У кожному обмеженні-нерівності замінити знаки нерівностей на знаки точних рівнянь і провести на площині відповідні їм гіперплощини –прямі.
2. Знайти півпростір, визначений кожним відповідним обмеженням-нерівністю.
3. Виявити область допустимих розв'язків.
4. Провести лінію рівня цільової функції, яка має спільні точки з ОДР.
5. Знайти точку (або точки) ОДР, де лінія рівня досягає найбільшого (найменшого) значення, або встановити її необмеженість на множині планів задачі.
6. Знайти координати точки розв'язку ЗЛП, яка й буде оптимальним планом задачі: $X^* = (x_1^*,\ x_2^*)$ і екстремальне значення цільової функції $Z(X^*)$.

Залежно від характеру ОДР і взаємного розміщення області і площини (лінії) рівня можуть бути такі випадки:

* Многогранник планів ЗЛП обмежений: в цьому разі лінійна форма досягає свого екстремуму або в окремих вершинах многогранника, або на його деякій грані чи ребрі, якщо гіперплощини рівня паралельні цим граням.

* Многогранник планів ЗЛП необмежений: тоді лінійна форма може бути необмеженою на множині планів знизу чи лише зверху, або знизу і зверху.

* Множина планів ЗЛП порожня, тобто не існує планів ЗЛП, які б не суперечили системі умов задачі.

Приклад. У складі телефонної мережі "Телеком" дві АТС, що є вузловими двох різних мікрорайонів міста, мають вільні ємності. В районах, що обслуговуються ними, планується телефонізувати два нових мікрорайони "Молодіжний" та "Сонячний". Вихідні дані про вільні ємності АТС, потреби мікрорайонів у номерах телефонного зв'язку, середня довжина абонентських ліній від АТС до мікрорайонів наведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

АТС	Середня довжина абонентських ліній у мікрорайонах (км)		Вільні ємності АТС (номерів)
	Молодіжний	Сонячний	
1	18	7	2600
2	9	15	6400
Потреби мікрорайонів (номерів)	2500	5500	

Визначити план задоволення потреб мікрорайонів у телефонному зв'язку за умов мінімальної вартості на прокладання абонентських ліній (середні витрати дорівнюють витратам на одну абонентську лінію середньої довжини).

Позначимо через x_{ij} кількість номерів i-ї АТС, що виділені j-му мікрорайону. Тоді математичну модель задачі можна записати так

$$Z = 18x_{11} + 7x_{12} + 9x_{21} + 15x_{22} \to \min$$

за умов

- використання вільних ємностей

$$x_{11} + x_{12} \le 2600,$$

$$x_{21} + x_{22} \le 6400,$$

- повного забезпечення потреб мікрорайонів

$$x_{11} + x_{21} = 2500,$$
$$x_{12} + x_{22} = 5500,$$

- невід'ємності змінних

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2;\ j = 1,2.$$

Запишемо канонічну форму задачі, вводячи додаткові змінні $x_{10} \geq 0$ та $x_{20} \geq 0$ в перше та друге обмеження-нерівності. Приходимо до такої канонічної форми вихідної задачі:

$$Z = 18x_{11} + 7x_{12} + 9x_{21} + 15x_{22} + 0(x_{10} + x_{20}) \to \min,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{10} = 2600,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{20} = 6400,$$
$$x_{11} + x_{21} = 2500,$$
$$x_{12} + x_{22} = 5500,$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2;\ j = 0,1,2.$$

В канонічній формі запису маємо дві вільні змінні, оскільки $k = n - m = 6 - 4 = 2$.
Нехай базисними змінними будуть $x_{21}, x_{22}, x_{10}, x_{20}$, а вільними x_{11}, x_{12}. Тоді

$$x_{21} = 2500 - x_{11},$$
$$x_{22} = 5500 - x_{12},$$
$$x_{10} = 2600 - x_{11} - x_{12},$$
$$x_{20} = -1600 + x_{11} + x_{12}.$$

Виразимо цільову функцію через вільні змінні:

$$Z = 9x_{11} - 8x_{12} + 105900 \to \min.$$

Приходимо до такої двовимірної стандартної задачі:

$$Z = 9x_{11} - 8x_{12} + 105900 \to \min,$$
$$x_{11} \leq 2500,$$
$$x_{12} \leq 5500,$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 2600,$$
$$x_{11} + x_{12} \geq 1600,$$
$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0.$$

Її розв'язок наведено на рисунку 2.1, де ОДР – п'ятикутник ABDEF.

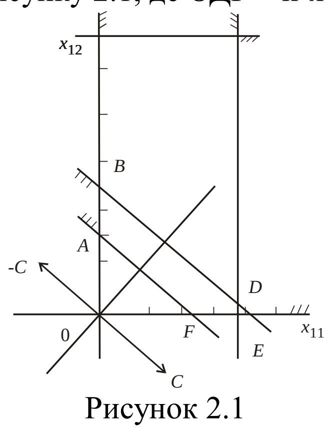


Рисунок 2.1

Оскільки цільову функцію треба мінімізувати, то лінію рівня Z пересуваємо у напрямі (– *C*), при цьому в точці *B* функція досягає найменшого значення. Координати точки *B* знаходимо, розв'язуючи систему

$$x_{11} + x_{12} = 2600,$$
$$x_{11} = 0,$$

що дає $x_{11}^* = 0,\ x_{12}^* = 2600.$ Разом маємо, що $x_{21}^* = 2500,$ $x_{22}^* = 2900,\ x_{10}^* = 0,\ \ x_{20}^* = 1000,$ а $Z = 85100.$ Отже, при оптимальному розв'язку всі вільні ємності першої АТС використовуються для телефонізації мікрорайону "Сонячний", а друга АТС виділяє в мікрорайони відповідно 2500 та 2900 номерів. Мінімальна довжина абонентських ліній, що відповідає й мінімальним витратам на них, сягає Z = 85100 км.

Розглянутий приклад ще раз свідчить, що в ЗЛП, в яких існує оптимальний розв'язок, екстремальне значення лінійної функції досягається на границі многокутника розв'язків.

Нагадаємо, що точка опуклої множини називається кутовою, якщо її не можна зобразити лінійною комбінацією двох інших точок цієї множини.

Отже, визначення екстремальних значень цільової функції принципово зводиться до порівняння їх у кутових точках многогранника планів, заданих основними обмеженнями ЗЛП.

Кутові точки виявляються разом з находженням допустимих базисних розв'язків системи (2.27).

Теорема. Кожний допустимий базисний розв'язок системи обмежень канонічної ЗЛП визначає єдину кутову точку-вершину многогранника G. Обернено, кожна кутова точка многогранника G визначає деякий (можливо не єдиний) допустимий базисний розв'язок канонічної ЗЛП.

Кількість кутових точок досить значна навіть для відносно малих m і n. Отже, кутових точок не більше ніж канонічна задача має базисних розв'язків, тобто не більше ніж C_n^r, де $r = m,$ але не всі вони можуть бути допустимими.

В практичних задачах значення m і n можуть досягати кількох сотень. Тому пошук вершин G, де цільова функція набуває оптимального значення шляхом простого перебору, безперспективний.

Однак існує добре організований порядок їх перебору, який дає симплекс-метод. При цьому перехід від однієї вершини многогранника G до наступної супроводжується зростанням значення цільової функції.

Теорема. Всяка лінійна форма, значення якої розглядаються в точках деякого опуклого многогранника G, досягає свого найбільшого (найменшого) значення в одній з його кутових точок-вершин. Якщо вона приймає найбільше (найменше) значення більше за однієї кутової точки, то вона приймає теж значення в кожній точці, що будуть їх опуклою лінійною комбінацією.

2.4 Симплексний метод розв''язування ЗЛП (метод послідовного поліпшення плану)

Запишемо канонічну ЗЛП (2.26)-(2.28) у векторній формі

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{2.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_0, \tag{2.36}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{2.37}$$

де $$P_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix}, \dots, P_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{vmatrix}, P_0 = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Наведемо основні означення та теореми симплексного методу:

* План $X=(x_1,...,x_n)$ називають опорним планом ЗЛП, якщо система векторів P_j, що входять у розкладання (2.36) з додатними коефіцієнтами x_j, лінійно незалежна.

* Опорний план задовольняє не менш ніж n лінійно-незалежних обмежень, включаючи і обмеження на знак, як точних рівнянь. Опорний план буде невиродженим, якщо він містить рівно m додатних компонент. Якщо ж він містить менше за m додаткових компонент, план називають виродженим.

* Базисом опорного плану $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ називають m лінійно-незалежних векторів умов P_i, $i=\overline{1,m}$, що включають всі вектори P_i, для яких $x_i>0$, $i=\overline{1,m}$.

Теорема. Якщо система векторів $P_1,...,P_m$ у розкладанні (2.36) лінійно незалежна і така, що $P_1x_1+...+P_mx_m=P_0$, де всі $x_i\geq 0$, $i=\overline{1,m}$, то точка $X=(x_1,...,x_m,0,...,0)$ буде вершиною многогранника планів задачі.

Теорема. Якщо $X=(x_1,...,x_n)$ – вершина многогранника планів, то вектори P_i, $i=\overline{1,m}$, які відповідають додатним x_i в розкладанні (2.36), лінійно незалежні.

Теорема. Припустимо, що:

1) задача лінійного програмування невироджена;
2) вона має хоча б один допустимий базисний розв'язок (опорний план);
3) максимізуюча форма задачі обмежена зверху на множині допустимих розв'язків.

Тоді існує принаймні один оптимальний розв'язок. Цей розв'язок можна досягти симплекс-методом, виходячи з будь-якого початкового допустимого базисного розв'язку.

Алгоритм симплекс-методу поділяють на три етапи:

– знаходження початкового опорного плану задачі;
– застосування правила переходу до кращого (не гіршого) плану;
– здобування оптимального плану або встановлення факту необмеженості цільової функції на множині планів задачі.

Оскільки цей алгоритм застосовується лише для канонічної форми ЗЛП, то задачу у інших формах можна зобразити в переважній канонічній формі, що робить проблему знаходження початкового опорного плану зайвою.

Приклад 1. Записати початковий опорний план до наступних задач:

$$1.\ Z=3x_1-x_2+x_3+x_4\to\max,$$
$$2x_1+x_2-x_3=3,$$
$$-x_1+2x_3+x_4=1,$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Оскільки маємо канонічну задачу, записану в переважній формі, то вибравши за базисні змінні x_2 і x_4, а за вільні x_1 і x_3, отримаємо початковий опорний план X= (0, 3, 0, 1). Цей план – невироджений, бо містить рівно m (m = 2 у нашому випадку) додатних компонент. При цьому Z = – 2.

$$2.\ Z=x_1+2x_2-x_3\to\min,$$
$$x_1+x_2+x_3\leq 4,$$
$$x_1-x_2+x_3\leq 2,$$
$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Зведемо задачу до канонічної форми запису

$$Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0(x_3 + x_4) \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

Тоді початковий опорний план запишеться так X= (0, 0, 0, 4, 2), а Z= 0.

Обчислювальною основою для симплекс-методу є алгоритм повного виключення .

Реалізацію симплекс-методу легко уніфікують і всі обчислення проводять за допомогою спеціального виду таблиць (симплекс-таблиць). Симплекс-таблиця – раціональна форма зображення даних ЗЛП, а також такий спосіб організації обчислень, що робить придатним симплекс-метод для застосування ЕОМ .

Запишемо задачу (2.26)-(2.28) у вигляді симплекс-таблиці. Для цього введемо в початкову таблицю (табл. 2.3) параметри, що відповідають початковому невиродженому опорному плану. Нехай без всякої втрати загальності їм буде план $X = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ...0)$, що визначається системою одиничних векторів $P_1, ..., P_m$, які утворюють базис m - вимірного простору:

- коефіцієнти при змінних x_j у цільовій функції (рядок C);
- коефіцієнти при базисних змінних x_i (стовпець C);
- базисні змінні (стовпець X);
- вектори, які входять у базис (стовпець $Б$);
- елементи x_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, матриці умов задачі,

де $x_{ij} \equiv a_{ij}$, $x_i = b_i$, $i = \overline{1,m}$;

– оцінки Δ_j, $j = \overline{1,n}$, що відповідають векторам $P_1, ..., P_n$ (останній цільовий рядок), та обчислюються за формулою:

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j, \ \ j = \overline{1,n}; \tag{2.38}$$

– значення цільової функції при даному опорному плані

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i. \tag{2.39}$$

Таблиця 2.3

I	$Б$	C	X	C_1	C_2		C_m	C_{m+1}		C_k		C_n
				P_1	P_2		P_m	P_{m+1}		P_k		P_n
1	P_1	C_1	x_1	1	0		0	$x_{1,m+1}$		X_{1k}		x_{1n}
l	P_l	C_l	x_2	0	0		0	$x_{l,m+1}$		x_{lk}		x_{ln}
M	P_m	C_m	x_m	0	0		1	$x_{m,m+1}$		x_{mk}		x_{mn}
m+1			Z_0	Δ_1	Δ_2		Δ	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Сформулюємо основні теореми, на яких базується алгоритм обробки симплекс-таблиць.

Теорема (про можливість поліпшення опорного плану). Якщо для даного опорного плану є така від'ємна оцінка Δ_k, що серед координат вектора P_k в даному базисі (тобто серед чисел x_{ik}, $i = \overline{1,m}$) є додатні, то базис, якому відповідає кращий опорний план, одержимо, замінивши вектором P_k той вектор P_l вихідного базису, для якого $x_{lk}>0$, та $\frac{x_l}{x_{lk}}<\frac{x_i}{x_{ik}}$ для всіх $x_{lk}>0$, $i\neq l$.

Теорема дає достатні умови того, що є кращим розв’язком задачі, а також правило його знаходження (точніше, його базису). Якщо для даного опорного плану буде порушена хоча б одна з умов теореми: або всі оцінки Δ_j, $j=\overline{1,n}$ невід’ємні, або є оцінка $\Delta_j<0$ така, що для будь-якого j усі $x_{ij}\leq 0$, то наступні теореми дають таку відповідь.

Теорема (критерій оптимальності розв’язку). Якщо для даного опорного плану всі оцінки Δ_j, $j=\overline{1,n}$ невід’ємні, то цей план є оптимальним.

Теорема (ознака необмеженості цільової функції). Якщо для будь-якого опорного плану існує хоча б одна від’ємна оцінка Δ_k така, що для неї всі $x_{ik}\leq 0$, $i=\overline{1,m}$, то це означає, що цільова функція даної ЗЛП не обмежена зверху на допустимій множині.

Сформулюємо правило алгоритму обробки симплекс-таблиць:

1) якщо $\Delta_j\geq 0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, тоді опорний план, який розглядається, є оптимальним;

2) якщо існують $\Delta_k<0$ і в стовпці P_k немає додатних елементів (усі $x_{ik}\leq 0$), то в цьому разі лінійна форма буде необмеженою зверху на множині, тобто ЗЛП не матиме розв’язку;

3) якщо існують $\Delta_k<0$ і у стовпцях P_k є додатні елементи $x_{ik}>0$, то можна перейти до нового опорного плану, який може надати лінійній формі значення, що перевищує попереднє (не менше від нього);

4) вектор P_k, який необхідно ввести у базис для поліпшення плану задачі, знаходиться як найменший від’ємний елемент Δ_j в цільовому рядку. Стовпець, що відповідає цьому правилу вибору, називається ведучим;

5) оскільки в базисі одночасно не може бути більше ніж m векторів, то вектор, який слід вивести з базису, знаходиться з умови

$$\theta_l=\min_i\left\{\frac{x_i}{x_{ik}>0}\right\}=\frac{x_l}{x_{lk}}. \qquad (2.41)$$

Із базису виводиться вектор P_l, на якому досягається найменше значення θ_l. Рядок l таблиці називають ведучим, а елемент x_{lk} – ведучим елементом;

6) заповнюється таблиця з номером “$r+1$”, що відповідає новому базису P_1, $P_2,\ldots,$ P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, ..., P_m. Усі елементи x_{ij} таблиці знаходять із співвідношень

$$x_{ij}^{(r+1)}=\begin{cases} x_{ij}^{(r)}-\dfrac{x_{lj}^{(r)}\cdot x_{ik}^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}}, & \text{якщо } i\neq l,\\[2ex] \dfrac{x_{lj}^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}}, & \text{якщо } i=l, \end{cases} \qquad (2.42)$$

$i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, “r” – номер ітерації.

Елементи $x_i^{(r+1)}$ нового плану – із співвідношень

$$x_i^{(r+1)}=x_i^{(r)}-\frac{x_l^{(r)}\cdot x_{ik}^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}}, \text{ якщо } i\neq l, \qquad (2.43)$$

$$x_k^{(r+1)} = \frac{x_l^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}}, \quad i = \overline{1,m},$$

а елементи цільового рядка – із співвідношень

$$Z_o^{(r+1)} = Z_o^{(r)} - \frac{x_l^{(r)} \cdot \Delta_k^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}},$$

$$\Delta_j^{(r+1)} = \Delta_j^{(r)} - \frac{x_l^{(r)} \cdot \Delta_k^{(r)}}{x_{lk}^{(r)}}, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (2.44)$$

Цим завершується (r+1)-а ітерація.

Якщо в цільовому рядку $\Delta^{(r+1)} \geq 0, \quad j=\overline{1,n},$ то знайдено оптимальний план, у противному разі треба перейти до наступної (r+2) – ї ітерації.

Зауваження 1. Якщо треба відшукати мінімум лінійної форми ЗЛП, то умовою оптимальності плану буде $\Delta_j \leq 0, \quad j=\overline{1,n}$ в цільовому рядку.

Зауваження 2. При знаходженні оптимального плану, що надає мінімуму лінійній формі, слід вибирати ведучим стовпцем той, елемент цільового рядка якого буде додатним.

Приклад 2. Нехай симплексна таблиця для задачі максимізації має вигляд (табл.. 2.4)

Таблиця 2.4

i	Б	С	X	2	0	-1	3	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	1	1	4	0	1	0
2	P_3	-1	8	0	16	1	-2	0
3	P_5	0	3	0	5	0	0	1
m+1			-6	0	-8	0	1	0

Жирними лініями виділено ведучі рядок та стовпець. Заповнимо наступну симплекс-таблицю (табл. 2.5), використовуючи формули (2.42-2.44):

Таблиця 2.5

i	Б	С	X	2	0	-1	3	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_2	0	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	P_3	-1	$8-\frac{1\cdot16}{4}=4$	$0-\frac{1\cdot16}{4}=-4$	0	1	$-2-\frac{1\cdot16}{4}=-6$	0
3	P_5	0	$3-\frac{1{,}5}{4}=\frac{7}{4}$	$0-\frac{1{,}5}{4}=-\frac{5}{4}$	0	0	$0-\frac{1{,}5}{4}=-\frac{5}{4}$	1
m+1		$-6-\frac{1(-8)}{4}=-4$		$0-\frac{1(-8)}{4}=2$	0	0	$1-\frac{1(-8)}{4}=3$	0

В цій таблиці всі оцінки векторів умов невід'ємні, тому опорний план $X^* = \left(0, \frac{1}{2}, 4, 0, \frac{7}{4}\right)$ буде оптимальним.

2.5 Метод штучного базису (М – метод)

Якщо система умов ЗЛП (2.27) не містить одиничну підматрицю порядку m, вектори якої утворюють базис, то для того, щоб знайти деякий допустимий базисний розв'язок, використовують спеціальний прийом –метод штучного базису. Метод штучного базису дає можливість сумістити два етапи: знайти деякий базисний розв'язок системи обмежень, після чого перейти до знаходження опорного плану. Завдяки цьому методу вдається скоротити обсяг обчислень і, крім того, встановити одночасно, чи існує взагалі хоча б один план ЗЛП, чи система її умов суперечлива.

Ідея методу полягає в тому, що до лівої частини кожного i -го рівняння задачі, яку подано в канонічній формі і яка не має одиничного базису, додають по одній штучній змінній $x_{n+i} \geq 0,\ \ i=\overline{1,m}.$ Вектори $P_{n+i},\ i=\overline{1,m},$ утворюють штучний базис. Виведення з базису штучних змінних забезпечується тим, що в лінійну форму вони вводяться з досить великим за модулем коефіцієнтом. Для задачі максимізації ці коефіцієнти мають бути від'ємними, а для задачі мінімізації – додатними. Вони позначаються числами $M,\ |M| >> c_j,\ \ j=\overline{1,n}.$

Отриману задачу називають розширеною (або ж М-задачею). Вона завжди має переважний вид, що дає змогу знайти її початковий опорний план.

Приклад . Записати розширені задачі та знайти їх початкові опорні плани:

1. $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 5,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$$
$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,3}.$$

Вводячи в обмеження задачі штучні змінні x_4 і x_5, отримаємо таку М-задачу:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 - M(x_4 + x_5) \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 7,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j=\overline{1,5},$$

початковий опорний план якої $X = (0, 0, 0, 5, 7)$, а $Z = 0 - 12M$.

Розглядувана задача є задачею з повним штучним базисом.

2. $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3,$$
$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,3}.$$

Вводячи додаткові змінні x_4 і x_5 та штучну змінну x_6, приходимо до такої М-задачі:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0(x_4 + x_5) + Mx_6 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 3,$$
$$x_j \geq 0,\ \ j=\overline{1,5}.$$

Вибираємо за базисні змінні x_3 та штучну змінну x_6. Тоді початковий опорний план буде $X = (0, 0, 3, 0, 0, 2)$, а $Z = 3 + 2M$.

Ця задача є задачею з неповним штучним базисом.

М-задачу можна розв'язати за допомогою алгоритму звичайного симплекс-методу, при цьому, в симплекс-таблицю не обов'язково додавати стовпці, які відповідають векторам, що утворюють штучний базис. Оскільки тепер величини

(m +1)-го рядка симплексної таблиці залежать від числа M, то це дає можливість розділити елементи Δ_j та Z_0 цього рядка на дві частини – незалежну від M і число M з деяким коефіцієнтом $\Delta j = \Delta j \ \pm M\Delta j''$, $Z_0 = Z_0 = \pm MZ_0''$. Залишимо в (m + 1)–му рядку додаток, незалежний від M, а $M\Delta j''$ та MZ_0'' – записуватимемо в (m+2)–му рядку, причому досить записати лише $\Delta j''$ та Z_0''. Знак оцінки Δ_j визначається числом, записаним у (m+2)-му рядку. Вилучивши всі штучні змінні з базису, (m+2)-й рядок можна відкинути й продовжувати працювати з (m+1)-м рядком аж до знаходження оптимального плану, або встановлення факту нерозв'язності вихідної задачі.

Зауваження 1. Якщо в оптимальному плані розширеної задачі всі штучні змінні дорівнюють нулю, то відповідний йому план вихідної задачі буде оптимальним.

Зауваження 2. Якщо в оптимальному плані М-задачі хоча б одна штучна змінна відмінна від нуля, то система обмежень вихідної задачі буде суперечливою.

Зауваження 3. Якщо лінійна форма розширеної задачі необмежена зверху /знизу/, то вихідна задача не має розв'язку.

Зауваження 4. Якщо на певній ітерації симплекс-методу знайшли план без штучних змінних, то далі розглядається не розширена, а вихідна задача.

Зауваження 5. Контроль обмежень. Оскільки елементи (m+1)-го рядка можна обчислити за формулами (2.38), (2.39), то їх можна використовувати для контролю після кожного кроку симплекс-перетворень.

2.6 Виявлення альтернативних оптимальних планів. Зациклення та спосіб його усунення

Якщо для знайденого оптимального плану серед небазисних оцінок Δ_j, $j = \overline{m+1, n}$ є оцінка $\Delta_k = 0$, то вектор P_k можна ввести в базис, що призводить до нового набору базисних змінних, а отож, і до нового оптимального плану. Значення цільової функції при цьому не змінюється. В розглянутому випадку маємо так званий альтернативний розв'язок ЗЛП, який записується як

$$X^* = \sum_{s=1}^{q} t_s X_s^*, \quad \sum_{s=1}^{q} t_s = 1, \ t_s \geq 0. \tag{2.45}$$

Якщо деякий опорний план буде виродженим, то при виборі ведучим елементом знаменника нульового відношення, лінійна форма після проведення ітерації не змінюється. Більше того, не змінюється значення всіх базисних змінних. Але змінюється набір базисних векторів та оцінки векторів умов. Тому обчислення можна продовжити. Виникає можливість зациклення алгоритму, коли після певного числа ітерації дістають план задачі, який вже існував раніше внаслідок скінченності множини опорних планів. Отже, циклу можна уникнути, якщо ведучим вибрати той рядок, для якого мінімальним буде співвідношення

$$\theta' = min\left\{\frac{x_{ij}}{x_{ik} > 0}\right\}, j = \overline{1, n}, \quad j \neq k, \tag{2.46}$$

тобто ведучий рядок визначається однозначно.

Приклад 2. Розв'язати симплекс-методом ЗЛП:

$$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 10,$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 16,$$
$$x_1 - 3x_4 + 2x_6 = 15,$$
$$x_1 + x_3 - x_4 = 3,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Розв'язання. Скористаємось методом штучного базису і запишемо таку М-задачу:

$$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - M(x_7 + x_8) \to \max,$$
$$x_1 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 10,$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 16,$$
$$x_1 - 3x_4 + 2x_6 + x_7 = 15,$$
$$x_1 + x_3 - x_4 + x_8 = 3,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8}.$$

Її початковий опорний план $X_0 = (0,16,0,0,10,0,15,3)$, а $Z = -6 - 18M$.

Розв'язання М-задачі симплекс-методом подано в табл.2.6.

Таблиця 2.6

i	Б	С	Х	1	-1	2	-1	1	-1
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	1	10	1	0	2	0	1	1
2	P_2	-1	16	0	1	1	2	0	1
3	P_7	$-M$	15	1	0	0	-3	0	2
4	P_8	$-M$	3	1	0	1	-1	0	0
m+1			-6	0	0	0	-1	0	1
m+2			-18	-2	0	-1	4	0	-2
1	P_5	1	7	0	0	2	1	1	1
2	P_2	-1	16	0	1	1	2	0	1
3	P_7	$-M$	12	0	0	-1	-2	0	2
4	P_1	1	3	1	0	1	-1	0	0
m+1			-6	0	0	0	-1	0	+1
m+2			-12	0	0	1	2	0	-2
1	P_5	1	1	0	0	$^5/_2$	2	1	0
2	P_2	-1	10	0	1	$^3/_2$	3	0	0
3	P_6	-1	6	0	0	$-^1/_2$	-1	0	1
4	P_1	1	3	1	0	1	-1	0	0
m+1			-12	0	0	½	0	0	0

Отже, штучні змінні виведені з базису, тому всі елементи (m+2)-го рядка дорівнюють нулю і критерій оптимальності плану перевіряємо по (m+1)-му рядку. Оскільки всі $\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6},$ то шуканий розв'язок такий

$$X^* = (3,10,0,0,1,6), \quad Z = (X^*) = -12.$$

Серед оцінок векторів умов оцінка небазисного вектора P_4 $\Delta_4 = 0.$ Цей вектор можна ввести в базис, виключивши з нього згідно з правилами симплекс-перетворень вектор P_5. При цьому значення цільової функції не зміниться, але ми отримуємо новий оптимальний план (табл.2.7)

Таблиця 2.7

i	Б	С	Х	1	-1	2	-1	1	-1
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	-1	$^1/_2$	0	0	$^5/_4$	1	$^1/_2$	0
2	P_2	-1	$^{17}/_2$	0	1	$-^3/_4$	0	$-^3/_2$	0
3	P_6	-1	$^{13}/_2$	0	0	¾	0	$^1/_2$	1
4	P_1	1	$^7/_2$	1	0	$^9/_4$	0	$^1/_2$	0
m+1			-12	0	0	½	0	0	0

Отже, новий оптимальний план

$$X^* = \left(7\!\!/_2,\ 17\!\!/_2,\ 0,\ 1\!\!/_2,\ 0,\ 13\!\!/_2\right), \quad Z = (X^*) = -12.$$

Таким чином, із табл.2.6 маємо оптимальний план (позначимо його через X_1^*)

$$X_1^* = (3,\ 10,\ 0,\ 0,\ 1, 6),$$

а з табл.2.7, позначивши його через X_2^*, оптимальний план

$$X_2^* = \left(7\!\!/_2,\ 17\!\!/_2,\ 0,\ 1\!\!/_2,\ 0,\ 13\!\!/_2\right).$$

Запишемо альтернативний розв’язок $X^* = kX_1^* + (1-k)X_2^*$, де $0 \le k \le 1$.

Маємо остаточно

$$X^* = k(3,\ 10,\ 0,\ 0,\ 1,\ 6) + (1-k)\left(7\!\!/_2, 17\!\!/_2,\ 0,\ 1\!\!/_2,\ 0,\ 13\!\!/_2\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}k,\ \frac{17}{2} + \frac{3}{2}k,\ 0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k,\ 1-k,\ \frac{13}{2} - \frac{1}{2}k\right).$$

3 Теорія двоїстості в лінійному програмуванні

3.1 Основна та двоїста задача як пара взаємоспряжених ЗЛП. Спосіб побудови

Результати досліджень, що пов’язані з двоїстістю, є центральною частиною лінійного програмування. З них випливають інші результати як теоретичні, так і практичні, на яких базуються деякі ефективні методи розв’язання ЗЛП .

Дамо економічну інтерпретацію задачі, двоїстій до задачі про використання ресурсів. Нехай підприємство вирішило раціонально використовувати відходи основного виробництва, які складають b_i одиниць, $i = \overline{1,m}$. З цих відходів можна налагодити випуск n видів неосновної продукції. Позначимо через a_{ij} норму витрати сировини i-го виду на одиницю j-ї продукції. Треба знайти такі невідомі x_j об’єми випуску продукції j-го виду, які забезпечують підприємству максимальний прибуток. Математична модель задачі

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Якщо з’явилась можливість реалізації цих відходів деякій організації, то виникає питання щодо встановлення орієнтовних оцінок (цін) на них. Позначимо останні λ_1, λ_2,...,λ_m. Вони встановлюються, виходячи з таких вимог:

1) загальну вартість відходів сировини організація, яка її купує, хоче мінімізувати;

2) підприємство продасть відходи за такими цінами, які забезпечать йому прибуток не менший від того, який воно отримало, якби організувало власне виробництво.

Вимога 1 – мінімізація закупівлі записується так:

$$T = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m \to \min. \qquad (3.4)$$

Вимогу 2 можна сформулювати так: підприємство відмовиться від випуску продукції j-го виду, якщо

$$a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2 + \cdots + a_{mj}\lambda_m \ge c_j\ , \ \ j = \overline{1,n}, \qquad (3.5)$$

де ліва частина нерівності означає виручку за сировину, яка йде на виготовлення продукції j-го виду, а права – її ціну. За змістом задачі оцінки невід'ємні

$$\lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}. \qquad (3.6)$$

Змінні λ_i називають **двоїстими оцінками, об'єктивно обумовленими оцінками** або **тіньовими цінами**. Задачі (3.1)-(3.3) і (3.4)-(3.6) називають **парою взаємно двоїстих або спряжених симетричних задач лінійного програмування.**

Кожній ЗЛП у загальній формі запису, яку вважаємо прямою

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \qquad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,l}, \qquad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{l+1,m}, \qquad (3.9)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,s};\quad s<n, \qquad (3.10)$$

відповідає задача, двоїста до неї:

$$T = \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i \to \min, \qquad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \ge c_j,\ j = \overline{1,s}, \qquad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \ge c_j,\ j = \overline{s+1,n}, \qquad (3.13)$$

$$\lambda_i \ge 0,\quad i = \overline{1,l}. \qquad (3.14)$$

Підіб'ємо підсумки у вигляді правил запису двоїстих задач у загальній формі, абстрагуючись від змістовної інтерпретації параметрів, що входять в їх економіко-математичні моделі.

Правила побудови двоїстих задач у загальній формі:

1. Одна з двох спряжених задач є задачею на максимум лінійної форми, а друга – на мінімум лінійної форми і навпаки.

2. Матрицю обмежень спряженої задачі (3.5) дістають транспонуванням матриці вихідної задачі (3.2).

3. Коефіцієнти лінійної форми спряженої задачі (3.4) є вільними членами системи обмежень вихідної задачі (3.2).

4. Вільні члени системи обмежень спряженої задачі (3.5) є коефіцієнтами лінійної форми вихідної задачі (3.1).

5. Кожній змінній прямої задачі відповідає одне обмеження спряженої задачі, причому, якщо j-а змінна невід'ємна, то j-е обмеження спряженої задачі – нерівність типу "не менше"; змінним, які не мають обмеження на знак, відповідають обмеження-рівності.

6. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає одна змінна спряженої задачі, причому, якщо i-е обмеження – нерівність типу "не більше", то i-а змінна спряженої задачі – невід'ємна; обмеженням-рівностям відповідають змінні без обмеження на знак.

Наведемо моделі двоїстих (спряжених) задач:

Симетричні

Вихідна	Двоїста
1. $Z=CX \to \max$,	$T=\lambda b \to \min$,
$AX \le b$,	$\lambda A \ge C$,
$x \ge 0$	$\lambda \ge 0$.
2. $Z=CX \to \min$,	$T=\lambda b \to \max$,
$AX \ge b$,	$\lambda A \le C$,
$X \ge 0$.	$\lambda \ge 0$.

Несиметричні

Вихідна	Двоїста
1. $Z=CX \to \max$,	$T=\lambda b \to \min$,
$AX = b$,	$\lambda A \ge C$.
$x \ge 0$.	
2. $Z=CX \to \min$,	$T=\lambda b \to \max$,
$AX = b$,	$\lambda A \le C$.
$X \ge 0$.	

3.2 Основні теореми теорії двоїстості та їх економічний зміст

Зв'язок між прямою та двоїстою задачами встановлюють теореми двоїстості.

Теорема. Якщо X і λ – допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач, то значення цільової функції прямої задачі ніколи не перевищує значення цільової функції двоїстої задачі, тобто

$$Z(X) \le T(\lambda). \tag{3.15}$$

З економічної точки зору теорема стверджує, що для будь-якого допустимого плану виробництва X і будь-якого допустимого вектора оцінок ресурсів λ загальна створена вартість не перевищує сумарної оцінки ресурсів.

Теорема. Якщо X^* і λ^* – допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач і для них виконується рівність

$$Z(X^*) = T(\lambda^*), \tag{3.16}$$

то X^* і λ^* – оптимальні плани (розв'язки) відповідних задач.

Економічний зміст теореми полягає в наступному: план виробництва X^* і вектор оцінок ресурсів λ^* будуть оптимальними, якщо ціна всієї продукції та сумарна оцінка ресурсів збігаються.

Приклад . Перевірити, чи буде пара векторів оптимальним розв'язком прямої та двоїстої задач з прикладу 1, розділу 2.2:

$$X = \left(250, 0, {}^{200}\!/_{3}\right),$$

$$\lambda = \left({}^{115}\!/_{9}, {}^{190}\!/_{9}, 0\right).$$

Запишемо двоїсту задачу щодо вихідної:

$$T(\lambda) = 450\lambda_1 + 600\lambda_2 - 240\lambda_3 \to \min,$$

$$\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3\ge 55,$$
$$2\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3\ge 60,$$
$$3\lambda_1+1,5\lambda_2-\lambda_3\ge 70,$$
$$\lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}.$$

Підставимо плани прямої та двоїстої задач в систему обмежень математичної моделі планування товарообігу:

$$1\cdot 250+2\cdot 0+3\cdot\frac{200}{2}=450,$$
$$2\cdot 250+3\cdot 0+1,5\cdot\frac{200}{2}=600,$$
$$1\cdot 250+1\cdot 0+1\cdot\frac{200}{2}>240,$$

та двоїстої до неї задачі оцінювання ресурсів, які використовуються в процесі реалізації:

$$1\cdot\frac{115}{9}+2\cdot\frac{190}{9}-1\cdot 0=55,$$
$$2\cdot\frac{115}{9}+3\cdot\frac{190}{9}-1\cdot 0>60,$$
$$3\cdot\frac{115}{9}+1,5\cdot\frac{190}{9}-1\cdot 0=70.$$

Оскільки обмеження задач виконуються, запропоновані розв'язки X і λ будуть допустимими. Перевіримо виконання рівності (3.16):

$$Z(x)=55\cdot 250+60\cdot 0+70\cdot\frac{200}{3}=55250/3,$$
$$T(\lambda)=450\cdot\frac{115}{9}+600\cdot\frac{190}{9}+240\cdot 0=55250/3.$$

Отже, згідно з умовами теореми дістаємо висновку, що запропоновані вектори є оптимальними планами задач.

Теорема (теорема існування). Пряма та двоїста задачі мають оптимальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли вони обидві мають допустимі розв'язки.

Теорема. Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то й друга теж має оптимальний розв'язок, причому їх оптимуми збігаються.

Якщо цільова функція однієї з задач не обмежена зверху (відповідно, знизу) на своїй допустимій множині розв'язків, то система обмежень другої задачі суперечлива.

Зауваження. Обернене твердження другої частини цієї теореми, взагалі кажучи, невірне. Якщо одна із задач має суперечливу систему обмежень, то із цього ще не випливає, що друга задача обов'язково має непусту допустиму множину та необмежену цільову функцію на ній. Обидві задачі разом можуть бути недопустимими.

Властивості цієї теореми двоїстості подані у вигляді таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Двоїста задача	Пряма задача	
	Має плани	Не має планів
Має плани	$\max Z(X^*)=\min T(\lambda^*)$	$\min T(\lambda)\to-\infty$
Не має планів	$\max Z(x)\to\infty$	Можливо

Зміст теореми полягає в наступному: якщо задача визначення оптимального плану, який максимізує випуск продукції, має розв'язок, то і задача визначення оцінок ресурсів має розв'язок теж. Ціна продукції, яка отримана при реалізації оптимального плану, збігається із сумарного оцінкою ресурсів. Збіг значень цільових функцій для відповідних планів пари двоїстих задач достатній для того, щоб ці плани були оптимальними. А це означає, що план виробництва і вектор оцінок ресурсів будуть оптимальними тоді і тільки тоді, коли вироблена продукція та сумарна оцінка ресурсів збігаються. Оцінки виступають як інструмент балансування витрат і результатів. Двоїсті оцінки гарантують рентабельність оптимального плану та обумовлюють збитковість будь-якого іншого плану, який відмінний від оптимального.

Теорема (друга теорема двоїстості або про доповняльну нежорсткість). Для того, щоб плани X^* і λ^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо виконання умов

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^*\right)x_j^* = 0,\ \ j = \overline{i,n}, \tag{3.17}$$

$$\lambda_i^*\left(b_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^*\right) = 0,\ \ i = \overline{1,m}. \tag{3.18}$$

Зіставляючи ці вирази з обмеженнями прямої та двоїстої симетричних задач, маємо

$$\left.\begin{array}{l} x_j^* \ge 0, \quad \text{але } x_j^* = 0, \quad \text{якщо } \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* > c_j,\ j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* \ge c_j, \quad \text{але } \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* = c_j, \quad \text{якщо } \ x_j^* > 0 \end{array}\right\}, \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i^* \ge 0, \text{ але } \lambda_i^* = 0, \text{ якщо } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* > b_i,\ i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* \le b_i, \text{ але } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* = b_i, \text{якщо } \lambda_i^* > 0 \end{array}\right\}. \tag{3.20}$$

Звідси випливає: якщо будь-яке обмеження однієї із задач її оптимальним планом перетворюється в строгу нерівність, то відповідна компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнюватиме нулю; якщо ж будь-яка компонента оптимального плану додатна для однієї із задач, то відповідне обмеження двоїстої задачі її оптимальним планом перетворюватиметься в строгу рівність.

Економічна інтерпретація цієї теореми така: якщо за деяким оптимальним планом виробництва X^* витрати i-го ресурсу строго менше за його запас b_i, то в оптимальному плані відповідна двоїста оцінка одиниці цього ресурсу дорівнює нулю. Якщо ж в деякому оптимальному плані оцінок його j-та компонента строго більше за нуль, то в оптимальному плані виробництва витрати відповідного ресурсу дорівнюють його запасу. Звідси двоїсті оцінки є мірою дефіцитності ресурсів.

Зневажаючи на те, що всі теореми двоїстості наведені для пари симетричних задач, вони легко поширюються на загальний випадок задач з довільними обмеженнями.

Теорема. Значення змінних λ_i^* в оптимальному розв'язку двоїстої ЗЛП чисельно дорівнює частинним похідним $\partial Z / \partial b_i$ для вихідної задачі, тому при малих змінах Δb_i, якщо план $X(b+\Delta b)$ залишається допустимим, матимемо

$$\Delta Z=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\cdot\Delta b_i. \qquad (3.21)$$

Оптимальні значення двоїстих змінних λ_i^* визначають внесок кожного ресурсу в $Z_{\max}$ при оптимальному розв'язку X^*.

3.3 Критерій оптимальності плану. Зв"язок між розв"язками прямої та двоїстої задач

Ідеї двоїстості дозволили сформулювати критерій оптимальності плану ЗЛП. Для канонічної ЗЛП на максимум вектор $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ називається розв'язувальним вектором, якщо

$$\text{а)} \quad \sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (3.22)$$

б) для деякого плану X цієї задачі виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i = c_j, \ \text{якщо} \quad x_j>0. \qquad (3.23)$$

Тоді критерій оптимальності плану можна визначити так: для оптимальності плану X^* ЗЛП на максимум необхідно і достатньо існування розв'язувального вектора λ, що пов'язаний з X^* умовою (3.22).

Зауваження. Для ЗЛП на мінімум умова (3.22) буде такою

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i \le c_j, \quad j=\overline{1,n}.$$

Приклад . Дослідити на оптимальність план X=(2,1,0,0) такої ЗЛП

$$Z=x_1+x_2+2x_3+8x_4\to\min,$$
$$2x_1-x_2+3x_3-2x_4=3,$$
$$-x_1+3x_2-4x_3+4x_4=1,$$
$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,4}.$$

Підставляючи план X в систему обмежень задачі, переконаємося, що він є допустимим:

$$2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 3\cdot 0 - 2\cdot 0 = 3,$$
$$-2 + 3\cdot 1 - 4\cdot 0 + 4\cdot 0 = 1.$$

Запишемо двоїсту задачу:

$$T(\lambda)=3\lambda_1+1\cdot\lambda_2\to\max,$$
$$2\lambda_1-\lambda_2\le 1,$$
$$-\lambda_1+3\lambda_2\le 1,$$
$$3\lambda_1-4\lambda_2\le 2,$$
$$-2\lambda_1+4\lambda_2\le 8.$$

Відповідно до умови (3.23) розв'язуємо таку систему рівнянь:

$$2\lambda_1-\lambda_2=1,$$
$$-\lambda_1+3\lambda_2=1.$$

Маємо $\lambda=\left(4/5,3/5\right)$. Оскільки третє та четверте обмеження двоїстої задачі виконуються

$$3\cdot\frac{4}{5}-4\cdot\frac{3}{5}<2,$$
$$-2\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{3}{5}<8,$$

дістаємо висновку, що вектор λ є розв'язувальним, отже, план X – оптимальним планом вихідної задачі.

Розв'язавши одну з пари симетричних задач, можна за значеннями в (m+1)-му рядку кінцевої симплекс-таблиці визначити значення змінних оптимального плану другої задачі. Оптимальні значення змінних двоїстої задачі знайдемо із співвідношень

$$\lambda_i^* = \Delta_{n+i}^{np}, \quad i=\overline{1,m}. \tag{3.24}$$

Аналогічно з індексного рядка кінцевої таблиці, що відповідає оптимальному плану двоїстої задачі, маємо

$$x_j^* = -\Delta_{m+j}^{qB}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{3.25}$$

При цьому, якщо ($n+i$) або ($m+j$) більше за кількість векторів – стовпців матриці обмежень канонічної форми відповідної задачі, то елементи $\Delta_{n+i}\,(\Delta_{m+j})$ знаходять шляхом циклічної перестановки елементів індексного рядка, починаючи з Δ_1.

Якщо розглянути несиметричні задачі, то співвідношення для визначення змінних оптимального плану двоїстої задачі набуде вигляду

$$\lambda^*=C_б \cdot P_x^{-1}, \tag{3.26}$$

де P_x^{-1} – матриця, обернена до матриці з компонент векторів останнього базису, на якому отримано оптимальний план. Коли вихідна задача зведена до одиничного базису, обчислення оберненої матриці не потрібне, бо P_x^{-1} міститиме стовпці кінцевої симплекс-таблиці на місці стовпців одиничних векторів початкової таблиці.

Співвідношення прямої і двоїстої задач установлюють, що для оптимального розв'язку та розв'язку на будь-якій ітерації, значення оцінок $\Delta_j,\ j=\overline{1,n}$ можна знайти за формулами

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - c_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{3.27}$$

3.4 Двоїстий симплекс – метод (метод послідовного поліпшення плану). Особливості його застосування

Ідея методу полягає у зв'язку між розв'язками прямої та двоїстої (спряженої) задач лінійного програмування.

Розглянемо канонічну ЗЛП

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{3.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{3.29}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.30}$$

ранг системи обмежень якої дорівнює m. Двоїста задача запишеться так

$$T = \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i \to \min \tag{3.31}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{3.32}$$

Це несиметрична пара задач. Нехай $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ – опорний план задачі (3.31)-(3.32).

Тоді можна дати таке означення: базисом опорного плану задачі (3.31)- (3.32), або спряженим базисом, називається довільна система m лінійно-незалежних векторів умов $P_1, P_2, \ldots, P_m$ задачі (3.28)-(3.30), для яких не більше ніж m обмежень (3.32) двоїстої задачі виконуються як строгі рівності та їх розв'язок $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ задовольняє решті нерівностей.

З кожним спряженим базисом зв'язується m-вимірній вектор $\overline{X} = (x_1, \ldots, x_m)$, компоненти якого задовольняють умовам (3.29) вихідної задачі, але при цьому можуть бути порушеними умови (3.30). Компоненти цього вектора дорівнюють коефіцієнтам розкладу вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)$ за спряженим базисом

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = P_0 = b. \qquad (3.33)$$

Обчислення компонентів опорного плану двоїстої задачі дає можливість обчислення й оцінки векторів умов вихідної задачі за співвідношенням (2.38) або (3.27).

Тоді розв'язок $\overline{X}$ назвемо псевдопланом задачі (3.28) – (3.30), якщо оцінки векторів умов вихідної задачі невід'ємні, тобто $\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$

Сформулюємо ознаки оптимальності плану прямої ЗЛП. Якщо серед базисних компонент псевдоплану $\overline{X}$ немає від'ємних, тобто $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$ то псевдоплан $\overline{X}$ - розв'язок, чи оптимальний план X^* задачі (3.28)-(3.30).

Кожному спряженому базису $P_1, P_2, \ldots, P_m$ відповідає матриця $\left| x_{ij} \right|,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$ елементи якої збігаються з коефіцієнтами розкладу векторів умов $P_j,\ j = \overline{1,n},$ задачі (3.28)-(3.30) за векторами цього базису

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_{ij} = P_j,\ \ j = \overline{1,m}. \qquad (3.34)$$

Отримані дані заносимо в симплекс-таблицю, яка аналогічна симплекс-таблиці звичайного симплекс-методу (див. табл.2.3).

Теорема про нерозв'язність вихідної задачі. Якщо серед базисних компонент псевдоплану $\overline{X}$ є від'ємні, наприклад, $x_l < 0,$ а серед елементів l-го рядка симплекс-таблиці всі $x_{lj} \geq 0,\ \ j = \overline{1,n},$ то це свідчить про необмеженість цільової функції спряженої задачі та відсутність планів прямої задачі.

Теорема про поліпшення псевдоплану. Нехай серед базисних змінних псевдоплану $\overline{X}$ знайдеться $x_l < 0,$ для якої в l-му рядку симплексної таблиці є $x_{lj} < 0,\ j = \overline{1,n}.$ Тоді псевдоплан можна поліпшити, якщо вивести з базису вектор P_l.

Вектор, який вводиться в базис, визначається із співвідношення

$$\theta_k = \min_j \left\{ \frac{-\Delta_j}{x_{lj} < 0} \right\} = \frac{-\Delta_k}{x_{lk} < 0}, \qquad (3.35)$$

де $x_{lk} < 0$ – ведучий елемент. Усі елементи нової симплексної таблиці обчислюються за тими самими співвідношеннями, які визначені для звичайного симплекс-методу (2.42)-(2.44).

Отриманий при цьому псевдоплан перевіряється на оптимальність. Якщо вихідна задача не вироджена, за скінчену кількість кроків визначається опорний план, якій буде її розв'язком.

Отже, в двоїстому симплекс-методі здійснюється рух по спряженим базисам і відповідним розв'язкам прямої задачі (псевдопланам) доти, поки не виконається ознака оптимальності.

На завершення наведемо деякі особливості застосування двоїстого симплекс-методу:

* На відміну від звичайного симплекс-методу для свого застосування не потребує знаходження початкового опорного плану деяких задач лінійного

програмування, що пов'язано з введенням штучних змінних, бо початковий псевдоплан визначається майже автоматично.

* Двоїстий симплекс-метод дозволяє в процесі ітерації вводити додаткові обмеження до вже визначеного деякого результату.

Приклад. Розв'язати ЗЛП двоїстим симплекс-методом:

знайти

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

за умов

$$x_1 + 2x_2 \geq 8,$$
$$2x_1 + x_2 \geq 7,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Запишемо задачу у вигляді, який потрібен для застосування методу

$$Z = -3x_1 - 5x_2 + 0(x_3 + x_4) \to \max$$

при обмеженнях

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -8,$$
$$-2x_1 - x_2 + x_4 = -7,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Спряжену задачу запишемо так

$$7 = -8\lambda_1 - 7\lambda_2 \to \min,$$
$$-\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq -3,\ (P_1),$$
$$-2\lambda_1 - \lambda_2 \geq -5,\ (P_2),$$
$$\lambda_1 \geq 0,\quad (P_3),$$
$$\lambda_1 \geq 0,\ (P_4).$$

Виберемо за базис вектори P_3, P_4. Тоді маємо, що λ_1=λ_2=0. Оскільки при цьому перше та друге обмеження спряженої задачі виконуються, то (P_3, P_4) – спряжений базис двоїстої задачі, а псевдоплан $\overline{X}$ запишеться як

$$\overline{X} = (0,\ 0,\ -8,\ -7).$$

Для нього оцінки векторів умов, обчислені за формулою (3.27), будуть такими

$$\Delta_1 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3 = 3,\ \Delta_2 = -2\lambda_1 - \lambda_2 + 5 = 5,\ \Delta_3 = \Delta_4 = 0.$$

Розв'язання задачі наведено в табл.3.2.

Таблиця 3.2

i	Б	С	$\overline{X}$	-3	-5	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	-8	-1	-2	1	0
2	P_4	0	-7	-2	-1	0	1
m+1			0	3	5	0	0
1	P_2	-5	4	1/2	1	-1/2	0
2	P_4	0	-3	-3/2	0	-1/2	1
m+1			-20	1/2	0	5/2	0
1	P_2	-5	3	0	1	-3/2	1/3
2	P_1	-3	2	1	0	1/3	-2/3
m+1			-21	0	0	7/3	1/3

Отже, оптимальный план X^* =(2,3), $Z_{\min}(X^*)$=21.

4 Транспортна задача (Т – задача)

4.1 Економічна і математична постановка. Особливості структури Т - задачі

Економіко-математична модель Т-задачі є характерною для значного класу ЗЛП, їх реальний зміст є досить різноманітний, іноді зовсім не пов'язаний із задачею про перевезення вантажів. Т-задачі поділяють на групи і критерієм цього розподілу є цільова функція: вартість перевезень, строки перевезень, відстань маршрутів тощо.

Розглянемо задачу, що стала класичною. В загальному вигляді вона формулюється так: для кожної пари "постачальник – споживач" знайти такий об'єм перевезень щоб:

– потужності всіх постачальників були реалізовані;
– задовольнити попит усіх споживачів;
– сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Запишемо економіко-математичну модель Т-задачі (2.14)-(2.17) в розгорнутому вигляді:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ \dots \ + \ c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \to \min, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \dots\dots + x_{1n} = a_1, \\ &x_{21} + x_{22} + \dots\dots + x_{2n} = a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &x_{m1} + x_{m2} + \dots\dots + x_{mn} = a_m, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} + \dots\dots + x_{mn} = b_1, \\ &x_{12} + x_{22} + \dots\dots + x_{m2} = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &x_{1n} + x_{2n} + \dots\dots + x_{mn} = b_n, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \qquad (4.4)$$

Величини x_{ij} (i =1,2,...,m,j=1,2,...,n), які підлягають визначенню, називають перевезеннями, c_{ij} – вартостями перевезень, a_i – запасами, b_j – потребами, $(x_{ij})_{m*n}$ – матрицею перевезень, $(c_{ij})_{m*n}$ – матрицею ватростей перевезень.

Однією з особливостей Т-задачі є те, що кожна змінна x_{ij} задачі входить в систему основних обмежень лише двічі. Одного разу у підсистему (4.2), другий раз та сама змінна входить у підсистему (4.3).

Друга особливість полягає в тому, що елементи матриці умов задачі –одиниці і нулі, причому кожний стовпець матриці має лише по дві одиниці, решта елементів дорівнюють нулю, кожен рядок або n, або m одиниць, а решта елементів – нулі. Матриця умов задачі має розмір $(m{\times}n){\times}(m{+}n)$.

Тепер дамо математичне формулювання транспортній задачі: на множині невід'ємних розв'язків системи обмежень (4.2) - (4.3) знайти такий розв'язок $X = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{mn})$, при якому значення лінійної функції (4.1) буде мінімальним.

Теорема. Т-задача завжди має розв'язок, для цього необхідно і достатньо, щоб виконувалась балансова умова, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d. \qquad (4.5)$$

Теорема. Ранг основної системи обмежень Т-задачі дорівнює $m+n-1$.

Її наслідком є твердження, що система обмежень Т-задачі завжди сумісна.

Теорема. Лінійна форма Т-задачі обмежена знизу на множині планів задачі.

Теорема. Якщо в задачі (4.1) – (4.4) усі a_i та усі b_j – цілі числа, то хоча б один її оптимальний розв'язок також буде цілочисельним.

Умови Т-задачі зручно записувати у вигляді розподільної таблиці, або Т-таблиці (табл. 4.1), в якій суміщені план перевезень $X = \left|x_{ij}\right|_{m\times n}$ та матриця вартостей перевезень $C = \left|c_{ij}\right|_{m\times n}$, причому вартість перевезень записуються у правому верхньому куті кожної клітинки, а в саму клітинку записуються перевезення x_{ij}.

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	C_{11} x_{11}	…	C_{1j} x_{1j}	…	C_{1n} x_{1n}	a_1
….	….	…	…	…	…	…
A_i	C_{i1} x_{i1}	…	C_{ij} x_{ij}	…	C_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	….
A_m	C_{m1} x_{m1}	…	C_{mj} x_{mj}	…	C_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Опорним планом Т-задачі називають будь-який її допустимий розв'язок.

Записаний у вигляді матриці перевезень, він має не більше як $m + n - 1$ відмінних від нуля додатних елементів.

Опорний план задачі буде невиродженим якщо він містить рівно $m+n-1$ додатних компонент і буде виродженим, якщо менше за $m+n-1$.
Заповнені перевезеннями клітинки відповідають базисним змінним. Тому ці клітинки називають базисними, а решту – вільними (або небазисними). Щоб не заповнювати їх нульовими перевезеннями, будемо проставляти в них крапки.

Розв'язування Т-задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів задачі. Розв'язування відбувається у два етапи:

– побудова опорного плану,

– знаходження оптимального плану.

Т-задачу можна розв'язати кількома методами: розподільним, потенціалів, диференційних рент, розв'язувальних додатків.

Сам процес розв'язування відбувається за допомогою операцій, які здійснюються в компактній таблиці, що містить усі умови задачі і є робочою таблицею подібно до симплексної таблиці .Перейдемо до вивчення способів знаходження початкового опорного плану транспортної задачі.

4.2 Знаходження опорних планів Т – задачі: метод північно – західного кута, мінімальної вартості, подвійних позначок, Фогеля

Є кілька простих щодо реалізації способів знаходження початкових опорних планів транспортної задачі.

Наведемо такі означення:

- Ланцюгом називають ламану лінію, яка з'єднує будь-яку послідовність клітинок таблиці Т-задачі і задовольняє умову: кожна пара клітинок міститься або в одному рядку, або ж в одному стовпці таблиці так, що жодні три чи більше клітинок послідовності не є клітинками одного рядка або одного стовпця.
- Ланцюг, перша та остання клітинки якого збігаються, утворює цикл.
- Число клітин, які утворюють всякий цикл таблиці Т –задачі, завжди парне.
- Ланцюг, що не утворює циклу, є ациклічним.

Зазначимо, що сукупність усіх базисних клітинок та однієї вільної клітини Т-задачі завжди утворює цикл. Цикли можуть бути найрізноманітнішої конфігурації.

При значних розмірах матриці перевезень X відшукування циклів набуває значних труднощів. Скористуємося формалізованим методом викреслювання. Цей метод дозволяє виділити у довільному плані перевезень Т-задачі цикл, якщо він існує. Виділимо в матриці X деяку множину ненульових елементів S, та встановимо, чи існують в S цикли. Розглядаючи один за одним рядки матриці X, викреслимо ті, які не містять елементи S, а також ті, що містять не більше одного елемента S. Потім переходимо до стовпців і викреслимо ті, які містять не більше одного елемента S. При цьому викреслені раніше елементи до уваги не приймаються. Повторюємо цей процес над рядками та стовпцями, які залишилися після викреслення. Після скінченої кількості кроків процес завершується одним із наступних результатів:

1. Усі рядки (стовпці) викреслені;
2. Отримана підматриця, в кожному рядку (стовпцю) якої буде не менше двох елементів.

В першому випадку із елементів S утворити цикл неможливо. В другому – множина елементів S містить цикл із невикреслених елементів S.

Початковий опорний план Т-задачі можна побудувати методами північно-західного кута (діагональний), мінімальної вартості, подвійних відміток (подвійної переваги), Фогеля .

Алгоритм методу північно-західного кута полягає у виконанні таких дій:

1. Знаходимо x_{11} початкового плану, що дорівнює меншому з чисел a_1, b_1, тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$, а всі інші елементи першого стовпця (якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$), або першого рядка (якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$), або і першого стовпця і першого рядка (якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$) матриці перевезень покладемо такими, що дорівнюють нулю.

Визначимо

$$a_1^{(1)} = a_1 - x_{11}, \; b_1^{(1)} = b_1 - x_{11}.$$

2. Далі розглянемо незаповнену частину таблиці після k кроків ітерації, тобто ту частину, яка містить ще невизначені елементи матриці перевезень.

Нехай її верхній лівий елемент є $x_{\lambda\mu}(\lambda + \mu = k + 2)$. Виконаємо ($k+1$)-ший крок ітерації. Отже знаходимо

$$x_{\lambda\mu} = \min(a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)}),$$

де $$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}, \qquad b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{im}.$$

Якщо $a_\lambda^{(k)} < b_\mu^{(k)}$, то заповнюємо нулями λ-й рядок, починаючи з $(\mu+1)$-го елемента. Якщо ж $a_\lambda^{(k)} > b_\mu^{(k)}$ то заповнюємо нулями μ-й стовпець. Коли ж $x_{\lambda\mu} = a^{(k)} = b_\mu^{(k)}$, то нулями заповнюємо λ-й рядок і μ-й стовпець. Обчислюємо

$$a_\lambda^{(k+1)} = a_\lambda^{(k)} - x_{\lambda\mu}, \qquad b_\lambda^{(k+1)} = b_\mu^{(k)} - x_{\lambda\mu}.$$

На цьому $(k+1)$-ший крок ітерації закінчується.

Через обмеженість числа елементів a_i, $i = \overline{1,m}$; та b_j, $j = \overline{1,n}$ алгоритм скінчений.

Приклад 1. Фірма «Мастер Девелоп», що займається будівництвом 4-х багатоповерхових будинків серії B_1, B_2, B_3 та B_4 в обласному центрі, закуповує цеглу на 4-х цегляних заводах A_1, A_2, A_3 та A_4, розташованих в межах області: щоденні потреби в цеглі складають відповідно 30, 22, 15, 34 тис. шт., а заводи щоденно виробляють 14, 20, 26, та 41 тис. шт. цегли. Тарифи на перевезення 1 тис. шт. цегли, а також інформація про попит на цеглу та її наявність суміщені в табл.4.2.

Знайти план перевезень за методом північно-західного кута.

Отриманий план перевезень наведено в таблиці 4.2, де індекс П позначає постачальників, а С – споживачів. Для зручності первісних обчислень знизу від неї виписані незадовільнені потреби, а в стовпцях справа – залишки невивезеного продукту на кожному кроці ітерації.

Таблиця 4.2

П	**С**				a_i	$a_i^{(1)}$	$a_i^{(2)}$	$a_i^{(3)}$	$a_i^{(4)}$	$a_i^{(5)}$	$a_i^{(6)}$
	B_1	B_2	B_3	B_4							

A_1	70 14	38 .	29 .	92 .	14	0	0	0	0	0	0
A_2	58 16	18 4	56 .	72 .	20	20	4	0	0	0	0
A_3	19 .	10 18	100 8	30 .	26	26	26	8	0	0	0
A_4	3 .	36	121 7	8 34	41	41	41	41	41	34	0
b_j	30	22	15	34	101						
$b_j^{(1)}$	16	22	15	34							
$b_j^{(2)}$	0	18	15	34							
$b_j^{(3)}$	0	0	15	34							
$b_j^{(4)}$	0	0	7	34							
$b_j^{(5)}$	0	0	0	34							
$b_j^{(6)}$	0	0	0	0							

Відшуканий план є опорним, не виродженим. Його загальна вартість складає $Z=70\cdot14+58\cdot16+18\cdot4+10\cdot18+100\cdot8+121\cdot7+8\cdot34=4079$ грн. Зазначимо, що опорний план завжди ациклічний, бо жодний набір відмінних від нуля елементів цього плану не утворює циклу.

Недоліком методу північно-західного кута є те, що він побудований без врахування значення коефіцієнтів витрат.

Наступні два методи – метод мінімальної вартості та подвійних позначок є модифікацією методу північно-західного кута.

* Метод мінімальної вартості дає ближчий до оптимального початковий план.

Суть методу в тому, що спочатку всі елементи матриці $\left|c_{ij}\right|_{m\times n}$ перенумеровують, починаючи з найменшого, шляхом циклічного перегляду її елементів. Спочатку заповнюють перевезеннями клітинку Т-таблиці, яка має найменший номер (одиницю); потім клітинки, які мають найменший порядковий номер, що залишилися незаповненими після першого кроку і т.д.

* Метод подвійних позначок полягає в тому, що спочатку розглядають рядки матриці С, в кожному “зірочкою” позначають мінімальний елемент. Потім розглядають стовпці матриці і в кожному “зірочкою” позначають мінімальний елемент. Таким чином, всі клітини Т-таблиці розбивають на клітини з двома позначками, з однією позначкою та без позначок. Спочатку перевезеннями заповняють клітини з двома позначками, потім із однією, а потім без позначок, надаючи перевагу тим, де вартість перевезень менша.

Метод апроксимації Фогеля дає опорний план, який є найближчим до оптимального. Алгоритм методу має такі основні етапи:

1. Обчислення різниць у кожному рядку та в кожному стовпцю матриці $\left|c_{ij}\right|_{m\times n}$ між найменшою вартістю та найближчою до неї за величиною. Різниці за рядками записуються справа в стовпець різниць, різниці за стовпцями – знизу в рядок різниць.
2. Пошук максимальної різниці як за рядками, так і за стовпцями. Максимальну різницю обводимо рамкою.

3. Розміщення в клітинку, де знаходиться найменша вартість, максимально можливого перевезення.

4. Обчислення різниць за рядками і стовпцями, не приймаючи до уваги вартості в клітинках, де є перевезення, та клітинки з крапкою, і визначення максимальної різниці.

5. Пошук мінімального елемента в рядку або стовпцю з максимальною різницею та розміщення в даній клітинці максимально можливого перевезення.

Далі повертаємося до етапу 1 і т.д.

Приклад 2. Для прикладу 1 побудуємо опорний план за методом Фогеля (табл.4.3).

Таблиця 4.3

П	С				a_i	Стовпці різниць						
	B_1	B_2	B_3	B_4								
A_1	70 .	38 .	29 14	92 .	14	9	9	–	–	–	–	–
A_2	58 .	18 20	56 .	72 .	20	38	–	–	–	–	–	–
A_3	19 23	10 2	100 1	30 .	26	9	9	9	11	81	81	0
A_4	3 7	36 .	121 .	8 34	41	5	5	5	5	118	–	–
b_j	30	22	15	34								
Рядки різниць	16	8	32	22								
	16	26	71	22								
	16	26	21	22								
	16	–	21	22								
	16	–	21	–								
	0	–	0	–								
	–	–	0	–								

При цьому плані загальна вартість перевезень така: $Z=29\cdot14+18\cdot20+19\cdot23+10\cdot2+100\cdot1+3\cdot7+8\cdot34=1616$ грн. Як і очікувалось, при використанні методу північно-західного кута загальна вартість перевезень більше, ніж при застосуванні методів, які враховують елементи матриці вартостей.

4.3 Задача, двоїста до транспортної

Один з ефективних способів розв'язування Т-задачі – метод потенціалів ґрунтується на розгляді двоїстої до транспортної задачі, яка має вигляд

$$W=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max \qquad (4.6)$$

при системі обмежень

$$u_i+v_j\le c_{ij},\ \ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}, \qquad (4.7)$$

де u_i – потенціали постачальників, v_j – потенціали споживачів.

4.4 Метод потенціалів знаходження розв''язку Т – задачі

Для застосування методу треба знати деякий опорний план транспортної задачі. Якщо початковий опорний план вироджений, то сукупність заповнених клітинок слід доповнити до загального числа $m + n – 1$ за рахунок незаповнених, але так, щоб утворена сукупність була ациклічною, оскільки всі клітинки, що входять до неї, повинні бути базисними. Для цього вводяться в приєднані клітинки перевезення ε, 2ε,...,де ε = 0 в оптимальному плані.

Теорема. Для того, щоб деякий опорний план Т-задачі був оптимальним, необхідно й достатньо його потенціальності, тобто, щоб він задовольняв такі умови: для базисних клітинок, де

$$x_{ij} > 0, \quad u_i + v_j = c_{ij}, \tag{4.8}$$

для небазисних, де

$$x_{ij} = 0, \quad u_i + v_j \le c_{ij}. \tag{4.9}$$

Це випливає безпосередньо з першої групи умов доповнюючої нежорсткості

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0. \tag{4.10}$$

Друга група умов доповнюючої нежорсткості для Т-задачі виконується автоматично, оскільки всі її обмеження є рівняннями, тобто

$$u_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{4.11}$$

$$v_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.12}$$

Отже, якою б не була система чисел-потенціалів u_i, v_j, що задовольняє умові (4.8), для кожної небазисної клітинки вартість циклу буде визначатися рівнянням

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = c_{ij} - \bar{c}_{ij}. \tag{4.13}$$

Алгоритм методу потенціалів полягає у виконанні таких дій:

1. Знаходимо будь-яким способом невироджений опорний план Т-задачі, який задовольняє першій умові потенціальності плану. Для базисних клітинок, загальна кількість яких (m+n–1), складаємо систему рівнянь (4.8).

2. Утворена система містить (m+n) невідомих u_i, $i = \overline{1,m}$ та v_j, $i = \overline{1,n}$. Оскільки рівнянь на одне менше, ніж змінних, то значення однієї із змінних вибираємо довільно (наприклад, вважаємо, що вона дорівнює нулю) і знаходимо розв'язок системи.

3. Перевіряємо, чи задовольняє знайдена система чисел-потенціалів другу умову потенціальності для усіх небазисних клітинок (4.9) (значення $\overline{c_{ij}} = u_i + v_j$ записуємо у верхній лівий кут кожної з клітинок транспортної таблиці). Якщо задовольняє, то опорний план, що розглядається, є потенціальним, тобто оптимальний план знайдено.

4. Якщо існують небазисні клітинки, в яких умови потенціальності порушуються, то ознакою змінної, яку слід ввести в базис, є максимум порушення (за модулем). В базис вводиться та клітинка, де справджується $\min\left(-\gamma_{ij}\right) = \min\left(c_{ij} - \bar{c}_{ij}\right)$. Ця клітинка разом із базисними утворює цикл. Позначимо приєднану небазисну клітинку знаком "+", наступну в утвореному циклі (базисну клітинку) – знаком "–", третю – знаком "+" і т.д. Оскільки число клітинок циклу парне, то він розпадається на два півцикли з однаковою кількістю клітинок – від'ємний півцикл, утворений клітинками зі знаком "-", і додатний, утворений клітинами зі знаком "+". Серед базисних клітинок від'ємного півциклу виберемо ту, яка містить найменше перевезення θ = min x_{ij}^{Θ}. Якщо змінити величини перевезень у клітинках циклу на цю величину – в усіх додатних клітинках перевезення збільшаться на неї, в усіх від'ємних – зменшаться на неї, то дістанемо новий опорний план.

Компоненти нового опорного плану можна обчислити так:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \theta \text{ для клітин від'ємного півциклу;} \\ x_{ij} + \theta \text{ для клітин додатного півциклу;} \\ x_{ij} \quad \text{ для клітин, які не входять у цикл.} \end{cases}$$

Загальна сума перевезень за всіма рядками і стовпцями після зсуву по циклу величини θ залишиться незмінною.

Змінюючи величини перевезень в клітинках циклу на величину θ, дістанемо новий опорний план задачі, ближчий до оптимального, ніж попередній, бо він надає меншого порівняно з попереднім значення цільовій функції.

5.Для нового опорного плану знову проводимо перевірку на потенціальність, згідно з кроками 1-3 алгоритму. Кроки 1-5 повторюються доти, поки не дістанемо оптимальний план.

Приклад 3. Розв'язати методом потенціалів Т-задачу, початковий опорний план якої суміщений з матрицею вартостей перевезень та даними запасів і потреб (табл. 4.3).

Використовуючи умови (4.8), складемо систему рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{aligned} &u_1^{(0)} + v_3^{(0)} = 29, \\ &u_2^{(0)} + v_2^{(0)} = 18, \\ &u_3^{(0)} + v_1^{(0)} = 19, \\ &u_3^{(0)} + v_2^{(0)} = 10, \\ &u_3^{(0)} + v_3^{(0)} = 100, \\ &u_4^{(0)} + v_1^{(0)} = 3, \\ &u_4^{(0)} + v_4^{(0)} = 8. \end{aligned}$$

Покладаючи $u_3^{(0)}$=0, маємо такий розв'язок:

$$u_1^{(0)} = -71,\ u_2^{(0)} = 8,\ u_4^{(0)} = -16,\ v_1^{(0)} = 19,\ v_2^{(0)} = 10,\ v_3^{(0)} = 100,\ v_1^{(0)} = 24.$$

Перевіряємо, чи задовольняє знайдений розв'язок умові потенціальності для небазисних клітинок. Для цього порівнюємо відповідні суми потенціалів з елементами матриці вартостей перевезень:

$$\begin{aligned} &u_1^{(0)} + v_1^{(0)} = -71 + 19 = -52 < 70, && u_2^{(0)} + v_4^{(0)} = 8 + 24 = 32 < 72, \\ &u_1^{(0)} + v_2^{(0)} = -71 + 10 = -61 < 38, && u_3^{(0)} + v_4^{(0)} = 0 + 24 = 24 < 30, \\ &u_1^{(0)} + v_4^{(0)} = -71 + 24 = -47 < 92, && u_4^{(0)} + v_2^{(0)} = -16 + 10 = -6 < 36, \\ &u_2^{(0)} + v_1^{(0)} = 8 + 19 = 27 < 58, && u_4^{(0)} + v_3^{(0)} = -16 + 100 = -84 < 121. \\ &u_2^{(0)} + v_3^{(0)} = 8 + 100 = 108 > 56, && \end{aligned}$$

Невідповідність дає клітинка (2,3): $u_2^{(0)} + v_3^{(0)} - c_{23} = 8 + 100 - 56 = 52$ з вартістю циклу $\gamma_{23} = -52$. Отже, цю клітинку треба ввести в базис. Виділимо цикл $\overset{\oplus}{(2,3)}\overset{(-)}{(3,3)}\overset{\oplus}{(3,2)}\overset{(-)}{(2,2)}$ і знайдемо елемент $\theta = \min(1, 20) = 1$ (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

<table>
<tr><td rowspan="2">П</td><td colspan="4">С</td><td rowspan="2">a_i</td><td rowspan="2">$u_i^{(0)}$</td></tr>
<tr><td>B$_1$</td><td>B$_2$</td><td>B$_3$</td><td>B$_4$</td></tr>
</table>

A_1	–52 70 ·	-61 38 ·	29 29 14	-47 92 ·	14	– 71
A_2	27 58 ·	18 18 - 20 ---	108 56 + -----!	32 72 •	20	8
A_3	19 19 23	10 ! 10 + 2----	100 100 - -----1	24 30 •	26	0
A_4	3 3 7	- 6 36 ·	-84 121 ·	8 8 34	41	- 16
b_j	30	22	15	34		
$v_j^{(0)}$	19	10	100	24		

Визначимо нові значення перевезень циклу

$$x_{23} = 0 + 1 = 1,$$
$$x_{33} = 1 – 1 = 0,$$
$$x_{32} = 2 + 1 = 3,$$
$$x_{22} = 20 – 1 = 19.$$

Новий план, де клітинка (2,3) буде вже базисною, а клітинка (3,3) – вільною, подано в табл.4.5.

Таблиця 4.5

П	С				a_i	$u_i^{(1)}$
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	0 70 ·	-9 38 ·	29 29 14	5 92 ·	14	– 71
A_2	27 58 ·	18 18 19	56 56 1	72 32 ·	20	8
A_3	19 19 23	10 10 3	48 100 ·	24 30 ·	26	0
A_4	3 3 7	- 6 36 •	32 121 ·	8 8 34	41	- 16
b_j	30	22	15	34		
$v_j^{(1)}$	19	10	48	24		

Знайшовши нові значення потенціалів $(u_i^{(1)}, v_j^{(1)})$, записуємо їх в таблицю 4.5. В цій таблиці подано оптимальний план, у чому легко переконатися, перевіривши його на потенціальність. Алгоритм закінчено. Цільова функція набула значення

$$Z^* = 29·14 +18·19 +56·1 +19·23 +10·3 +8·34 = 1564 \text{ грн.}$$

Для контролю обчислень при розв’язуванні Т-задачі методом потенціалів досить кожний план перевірити на допустимість. Оптимальний план можна перевірити за формулою, що випливає з теореми про критерій оптимальності планів пари двоїстих задач:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j \, v_j^* = W_{\max}, \qquad (4.14)$$

чим перевіряється також правильність визначення системи потенціалів.

Зауваження:

- Якщо маємо відкриту Т-задачу, то для її розв'язування існує спосіб фіктивних пунктів, за допомогою якого задача формально зводиться до закритої, що дає змогу розв'язати її методом потенціалів.

Для задачі з перевищенням суми запасів над сумою потреб вводиться фіктивний пункт доставки $B_ф = B_{n+1}$ з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.15}$$

Фіктивність b_{n+1} пункту враховується тим, що всі величини $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Якщо маємо задачу з перевищенням суми потреб над сумою запасів, то аналогічно, вводячи фіктивний пункт відправлення $A_ф = A_{m+1}$ з фіктивним запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{4.16}$$

і, покладаючи $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$, приходимо до закритої Т-задачі.

- Т-задача може мати не єдиний оптимальний план. Ознакою цього є умова – вартість циклу γ_{ij} дорівнює нулю для деякої небазисної клітинки. Цю клітинку можна ввести в базис, тим самим отримати новий оптимальний план тієї ж вартості, що й була визначена раніше.

4.5 Т-задача за критерієм часу

У деяких умовах, наприклад при транспортуванні швидкопсувних товарів, в аварійних ситуаціях тощо вартість перевезень має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення. Так виникає транспортна задача за критерієм часу.

Розглянемо задачу, в якій задані запаси $a_1, a_2, \ldots a_m$ і потреби $b_1, b_2, \ldots b_n$, де $\sum_{i=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j$, а також матриця тривалостей перевезень $T = \left| t_{ij} \right|_{m \times n}$, елементами якої t_{ij} є час, потрібний для перевезення довільної кількості вантажу з пункту постачання A_i в пункт споживання B_j.

Треба визначити такий план перевезень $X^* = \left| x_j^* \right| m \times n$, який би мінімізував загальний час перевезення всіх вантажів і компоненти якого задовольняють звичайні умови Т-задачі.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.19}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{4.20}$$

Основним моментом задачі є те, що кожній додатній компоненті плану перевезень ($x_{ij} > 0$) ставиться у відповідність час цього перевезення ($t_{ij} > 0$) так, що час, який підлягає мінімізації, є найбільше число t_{ij} серед тих компонент матриці Т, які відповідають відмінним від нуля перевезенням. Тобто всі перевезення закінчуються тоді, коли закінчується найтриваліше із всіх перевезень. Це можна записати так

$$T = \max_{x_{ij}>0} t_{ij}. \qquad (4.21)$$

Оптимальне значення цільової функції буде таким:

$$T = \min \max_{x_{ij}>0} t_{ij}. \qquad (4.22)$$

Сформульована задача не дає підстав зараховувати її до задач лінійного програмування, оскільки функція (4.22) є нелінійною. Проте розв'язувати задачу треба методами, аналогічними до методів розв'язування звичайних Т-задач за критерієм вартості.

Наведемо алгоритм розв'язування сформульованої задачі, що ґрунтується на послідовному розв'язуванні ряду допоміжних задач:

1. Знаходимо мінімальний елемент матриці $|t_{ij}|_{m\times n}$. Клітинки таблиці, які відповідають мінімальному елементу $t_1 = \min|t_{ij}|_{m\times n}$ вважаються відкритими для перевезень, тоді як усі інші, де $t_{ij} > t_1$, забороненими (їх перекреслюємо).

2. Розв'язуємо додаткову задачу з визначеною множиною заборонених клітинок. Якщо при цьому задовольняються умови (4.18), (4.19), то оптимальний план знайдено і $T^* = t_1$, а якщо ні, то переходимо до п.3.

3. Знаходимо мінімальний елемент серед тих елементів t_{ij} матриці тривалостей перевезень, які відповідають клітинкам, забороненим для перевезень. Нехай ним буде елемент t_2, тоді всі ті клітинки, для яких $t_{ij} = t_2$, приєднуються до клітинок, вільних для перевезень.

4. Розв'язуємо нову допоміжну задачу з новою множиною вільних клітинок і перевіряємо допустимості знайденого плану за умовами (4.18), (4.19). Якщо вони задовольняються, то знайдений план оптимальний і $T^* = t_2$. Якщо ж ні, то повторюємо дії, аналогічні до описаних доти, поки не отримаємо оптимального плану.

Приклад. Менеджери фірми «Свіжі фрукти» отримали завдання визначити оптимальний план перевезень яблук з чотирьох оптових баз до чотирьох торгових точок за найкоротший термін. Запаси яблук на базах складають 25, 34, 31 та 23 т, а потреби торгових точок відповідно 21, 37, 40 та 15 т. Матриця T така

$$T = |t_{ij}| = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \\ 11 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix},$$

де t_{ij} – час, витрачений на перевезення вантажу з і-ї бази до j-ї торгової точки.

Розглянемо елементи матриці T (табл. 4.6) і знаходимо $\min t_{ij} = 4 = t_1$. Розв'язуємо таку допоміжну задачу:

Таблиця 4.6

П	**С**				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	

A_1	10 ×	8 ×	5 ×	7 ×	25
A_2	5 ×	6 ×	6 ×	9 ×	34
A_3	4 10	8 ×	4 21	5 ×	31
A_4	11 ×	4 23	5 ×	9 ×	23
b_j	21	37	40	15	

Оскільки умови (4.8), (4.19) не виконуються, знаходимо $\min t_{ij} > 4 = t_2 = 5.$ Приєднуємо клітинки з t_{ij} = 5 до вільних для перевезень і розв'язуємо допоміжну задачу (табл. 4.7),

Таблиця 4.7

П	**C**				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 ×	8 ×	5 25	7 ×	25
A_2	5 11	6 ×	6 ×	9 ×	34
A_3	4 10	8 ×	4 6	5 15	31
A_4	11 ×	4 23	5 ×	9 ×	23
b_j	21	37	40	15	

що також не дає розв'язку.

Знову знаходимо $\min t_{ij} > 5 = t_3 = 6$ і розв'язуємо таку допоміжну задачу:

Таблиця 4.8

П	**C**				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 ×	8 ×	5 25	7 ×	25
A_2	5 11	6 14	6 9	9 ×	34
A_3	4 10	8 ×	4 6	5 15	31
A_4	11 ×	4 23	5 ×	9 ×	23
b_j	21	37	40	15	

що й дає оптимальний план задачі. Отже, T*= 6 год.

4.6 Двоетапна Т – задача і методи її розв"язування

Розглянемо клас Т-задач з обмеженнями на пропускні спроможності. Перш за все, звернемося до задач, в яких забороняються або блокуються деякі перевезення. Подібні задачі зустрічаються при дослідженні відкритих моделей, коли вводиться додаткова умова, згідно якої окремі перевезення від певного постачальника до певного споживача заборонені. Це означає, що в оптимальному розв'язку певні клітинки обов'язково повинні бути вільними, тобто значення перевезень x_{ij} в них дорівнюють нулю. Для блокування таких клітинок штучно збільшуються їх коефіцієнти витрат c_{ij} до величини М, де М $>>c_{ij}$, і задача розв'язується методом потенціалів. Якщо в даній задачі додаткова умова принципово здійснюється, то обчислювальний алгоритм забезпечує звільнення таких клітинок в оптимальному розв'язку, бо в протилежному випадку мінімуму функції Z досягти не можливо.

Продемонструємо його застосування на прикладі

Приклад 1. Фірма «Металпостачання» займається постачанням металопрокату з трьох заводів на чотири товарних склади. Витрати транспортування металопрокату, наявність продукції на заводах і попит кожного складу в тонах наведені в табл. 4.9

Таблиця 4.9

П	С				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	8	4	7	70
A_2	3	5	6	4	70
A_3	7	2	5	3	20
b_j	80	30	40	40	

Знайти такий план перевезень, який мінімізує транспортні витрати за умов, що перший та четвертий склади повинні отримати металопрокат у повному обсязі.

Оскільки $\sum_{i=1}^{m} a_i = 160 < \sum_{j=1}^{n} b_j = 190,$ відкриту модель задачі робимо закритою, вводячи фіктивного постачальника A_4, для якого потужність треба прийняти такою: 190 – 160 = 30.

Оскільки треба заблокувати першого та четвертого споживачів, то в оптимальному розв'язку повинно бути $x_{41} = 0$, $x_{44} = 0$.

Для блокування цих клітинок штучно збільшуємо коефіцієнти c_{41} і c_{44}, покладаючи їх рівними М, де М достатньо велике число поряд з іншими числами c_{ij}. Запишемо в таблицю 4.10 знайдений опорний план вихідної задачі, обчислений за методом потенціалів без врахування блокування клітинок (4.1), (4.4).

Таблиця 4.10

П	С				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 8	7–M 8	4 4 40	7 7 30	70	7–M
A_2	3 3 70	3–M 5	0 6	3 4	70	3–M
A_3	2+M 7	2 2 20	-1+M 5	2+M 3	20	2
A_4	M M 10	0 0 10	3+M 0	M M 10	30	0
b_j	80	30	40	40		
v_j	M	0	–3+M	M		

Подальше розв'язання задачі методом потенціалів подано в таблицях 4.11-4.12.

Таблиця 4.11

П	С				a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	6+M 8 ⊕---	5 8 ---------	4 4 40 ---------	7 7 30 ----Θ	70	6
A_2	3 3 70	3-M 5	1-M 6	2-M 4	70	3–M
A_3	2+M 7	2 2 Θ--- 10	0 5 ---------	3 3 ---⊕ 10	20	2
A_4	M M Θ---- 10	0 0 ----⊕ 10	-2 0	1 M	30	0
b_j	80	30	40	40		
v_j	M	0	–2	1		

Таблиця 4.12

П	С				a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8 10	8	4 40	7 20	70
A_2	3 70	5	6	4	70
A_3	7	2	5	3 20	20
A_4	M	0 30	0	M	30
b_j	80	30	40	40	

В таблиці 4.12 отримано оптимальний розв'язок, в якому виконані додаткові умови $x_{41} = x_{44} = 0$, тобто перший та четвертий склади отримають металопрокат у повному обсязі, а другий склад недодержить 30 т прокату. При цьому

$$Z = 8{\cdot}10 + 4{\cdot}40 + 7{\cdot}20 + 3{\cdot}70 + 3{\cdot}20 + 0{\cdot}30 = 650 \text{ тис. грн.}$$

Розглянемо Т-задачі з обмеженнями на пропускні спроможності. Такі обмеження задаються на кожному з маршрутів додатково до закритої моделі транспортної задачі:

$$x_{ij} \le d_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.23}$$

Для розв'язування подібних задач можна застосувати метод потенціалів. Але треба мати на увазі таке:

1. Достатніми умовами розв'язуваності задачі є існування хоча б одного допустимого розв'язку;

2. На відміну від звичайної задачі ітераційний процес складається з двох етапів:

I. Будуємо вихідний опорний план за методом мінімальної вартості з урахуванням обмежень (4.23). Якщо на даному кроці величина x_{ij} визначається розмірами запасів (a_i) чи потреб (b_j), то, як звичайно, в таблиці заповнюється нулями рядок або стовпець і знаходиться нове найменше число скороченої таблиці. Якщо ж на даному кроці величина x_{ij} визначається тільки обмеженням d_{ij}, то в таблиці заповнюється тільки клітинка (ij).Може статися, що після заповнення таблиці всі запаси і потреби вичерпані, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j.$$

Тоді отриманий розв'язок і буде вихідним опорним планом. Якщо в будь-якому рядку (відповідно, в стовпці) залишиться нерозподілений залишок, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j,$$

то треба перейти до другого етапу.

II. Позначимо

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}) = \delta \qquad (4.24)$$

і в таблиці додатково введемо (m+1)-й рядок із запасом $a_{m+1} = \delta$ і (n+1)-й стовпець з потребами $b_{n+1} = \delta$, прийнявши $c_{i,n+1} = c_{m+1,j} = M$ і $c_{m+1,n+1} = 0$. Нову розширену задачу розв'язуємо методом потенціалів поки не звільняться всі блоковані клітини. Якщо це можливо, то отримуємо опорний план вихідної задачі. В протилежному випадку вихідна задача не має допустимого розв'язку.

Для потенціальності розв'язку необхідно і достатньо існування таких потенціалів u_i, v_j, що

$$\begin{aligned} &u_i + v_j = c_{ij}, \text{ якщо } 0 < x_{ij} < d_{ij},\\ &u_i + v_j \le c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij}=0, \\ &u_i + v_j \ge c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = d_{ij}. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Будуючи опорний план задачі, а також поліпшуючи його, треба мати на увазі, що базисними змінними є лише ті x_{ij}, які задовольняють строгій нерівності $x_{ij} < d_{ij}$. Однак, якщо їх кількість менше рангу r, то до базисних можна приєднати певну кількість клітинок, для яких $x_{ij} = d_{ij}$ (або $x_{ij} = 0$), але так, щоб зайняті клітинки не утворювали цикл.

Приклад 2. Для будівництва трьох доріг використовується гравій із трьох кар'єрів. Запаси гравію в кожному з кар'єрів відповідно дорівнюють 45, 65, 40 т, а потреби в гравії на будівництві складають 70, 30 та 50 т. Тарифи перевезень задані матрицею С, а пропускна здатність магістралей матрицею $|d_{ij}|$. Знайти план перевезень гравію, при якому потреби в ньому кожної з будованих доріг були б задоволені за умов найменшої загальної вартості перевезень.

$$|d_{ij}| = \begin{vmatrix} \infty & 15 & 30 \\ \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Символ ∞ в матриці $|d_{ij}|$ означає, що для відповідної комунікації немає обмежень на пропускну спроможність.

В таблиці 4.13 надано вихідний план, який побудовано методом мінімальної вартості. В кожній клітинці цієї таблиці у верхньому правому куті записані елементи c_{ij} в лівому нижньому – елементи d_{ij}.

Таблиця 4.13

<table>
<tr><th rowspan="2">П</th><th colspan="3">С</th><th rowspan="2">a_i</th></tr>
<tr><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>5</td><td>2
15
15</td><td>3
30
30</td><td>45</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>7
30</td><td>9
10
10</td><td>6
20</td><td>65</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>4
40</td><td>7</td><td>5</td><td>40</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td>70</td><td>30</td><td>50</td><td></td></tr>
</table>

Усі клітинки основної частини таблиці закриті, але є нерозподілений залишок δ=5 у другому рядку та другому стовпці. Тому вводимо додатковий $(m+1)$-й рядок і додатковий $(n+1)$-й стовпець і в клітинки (2.4) та (4.2) записуємо $x_{24}=x_{42}=5$, укладаючи табл.4.14.

Таблиця 4.14

<table>
<tr><td rowspan="2">П</td><td colspan="4">С</td><td rowspan="2">a_i</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>n+1</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>5</td><td>2
15
15</td><td>3
30
30</td><td>M</td><td>45</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>7
30</td><td>9
10
10</td><td>6
20</td><td>M
5</td><td>65</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>4
40</td><td>7</td><td>5</td><td>M</td><td>40</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td>M</td><td>M
5</td><td>M</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>b_j</td><td>70</td><td>30</td><td>50</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Оскільки в наведеному розв'язку розширеної задачі 5 базисних змінних замість $r = m + n + 1 = 3 + 3 + 1 = 7$, то включаємо в базисні два нульових перевезення $x_{11} = 0$ та $x_{44} = 0$ і переходимо до виконання ітерації методом потенціалів (табл.4.15). Базисні змінні підкреслені знизу.

Таблиця 4.15

<table>
<tr><td rowspan="2">П</td><td colspan="4">С</td><td rowspan="2">u_i</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>n+1</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>5 5
$\underline{0}$</td><td>2M-2 2
15
15</td><td>4 3
30
30</td><td>M-2 M</td><td>5</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>7 7
$\underline{30}$
⊕----
|</td><td>2M 9
10

10</td><td>6 6
$\underline{20}$
-----------</td><td>M M
$\underline{5}$
----Θ
|</td><td>7</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>4 4
$\underline{40}$
Θ----</td><td>2M-3 7

----⊕</td><td>3 5</td><td>M-3 M
|</td><td>4</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td>-M+7 M</td><td>M M
Θ----
$\underline{5}$</td><td>-M+6 M
-----------</td><td>0 0
----⊕
$\underline{0}$</td><td>-M+7</td></tr>
<tr><td>v_j</td><td>0</td><td>2M-7</td><td>-1</td><td>M-7</td><td></td></tr>
</table>

Вільній клітинці (3.2) відповідає від'ємна ціна циклу, що свідчить про можливість поліпшення розв'язку. Будуємо для неї цикл і переходимо до кращого розв'язку (табл. 4.16).

Таблиця 4.16

П	**С**				u_i
	B_1	B_2	B_3	n + 1	
A_1	5 5 0	8 2 15 15	4 3 30 30	M-2 M	5
A_2	7 7 35	10 9 10 10	6 6 20	M M 0	7
A_3	4 4 35	7 7 5	3 5	M-3 M	4
m+1	M-7 M	M-4 M	M-8 M	0 0 5	M- 7
v_j	0	3	-1	M - 7	

Оскільки всі допоміжні клітинки звільнені і тільки в клітинці (4.4) x_{44}=5, то розв'язок без (m+1)-го рядка і (n+1) стовпця є розв'язком вихідної задачі. Він містить п'ять базисних змінних. Обчислені потенціали свідчать, що умови (4.25) виконуються, тобто цей розв'язок буде оптимальним розв'язком задачі.

Загальна вартість перевезень складає

$$Z = 2\cdot15 + 3\cdot30 + 7\cdot35 + 9\cdot10 + 6\cdot20 + 4\cdot35 + 7\cdot5 = 750 \text{ у. о.}$$

ТРЕНІНГ УМІНЬ

1 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 1.

Завдання

Звести до канонічної загальну задачу лінійного програмування

$$Z = -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \longrightarrow min,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4,$$
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 2,$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \qquad \leq 6,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Розв"язання

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідність із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Перетворення мішаної системи обмежень у систему рівнянь шляхом введення додаткових невід"ємних змінних до лівих частин нерівностей.	$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2$, $5x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 6$, *де* $x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$.
2	Введення додаткових змінних у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами	$Z = - x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6$
3	Введення умов невід"ємності змінних: -змінні, не обмежені за знаком, замінюються різницею двох невід"ємних змінних; - недодатні змінні замінюються шляхом множення на (-1) невід"ємними змінними; - змінні, не менші деякого числа, замінюються введенням додаткових невід"ємних змінних.	$x_4 = x'_4 - x''_4$, *де* $x'_4 \geq 0,\ x''_4 \geq 0$; $x'_2 = - x_2 \geq 0$; $x_3 = 1 + x'_3$, *де* $x'_3 \geq 0$.
4	Запис канонічної ЗЛП з обмеженнями – рівностями та однорідними умовами невід"ємності.	$Z = -x_1+x'_2+2x'_3-3x'_4+3x''_4+0(x_5+x_6)+2 \longrightarrow min$ $2x_1+x'_2+3x'_3+x'_4-x''_4 \qquad =1$, $3x_1+x'_2-2x'_3+x'_4-x''_4-x_5 \qquad =4$, $5x_1-x'_2-x'_3 \qquad +x_6 =7$, $x_1\geq0,x'_2\geq0,x'_3\geq0,x'_4\geq0,x''_4\geq0,x_5\geq0,x_6\geq0$.

Розв"яжіть самостійно:

Завдання 1.1

Запишіть канонічну ЗЛП із даної загальної форми задачі, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z=x_1 -4x_2 -5x_3 +x_4 \longrightarrow min$,
$-11x_1 +10x_2 +3x_3 -10x_4 \leq 1$,
$2x_1 + x_2 +6x_3 -11x_4 = 3$,
$x_1 +15x_2 -3x_3 - 9x_4 \geq 2$,
$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1,\ x_4 \leq 0$.

1. $Z=-9x_1 +4x_2 +4x_3 -3x_4 \longrightarrow min$,
$-3x_2 +4x_3 +6x_4 \leq 8$,
$12x_1 -2x_2 -5x_3 +3x_4 \geq 7$,
$-8x_1 +6x_2 - x_3 +2x_4 = 6$,
$x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 1$.

2. $Z=11x_1-4x_2-8x_3+x_4 \longrightarrow \min,$

$13x_1+8x_2+7x_3-x_4 \geq 15,$

$5x_1-15x_2-9x_3+6x_4=1,$

$4x_1+13x_2+x_3-7x_4 \leq 11,$

$x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0.$

3. $Z=3x_1-2x_2-x_3+13x_4 \longrightarrow \max,$

$-15x_1+7x_2-x_3+9x_4=3,$

$-x_1+x_3+5x_4 \geq 4,$

$10x_1-x_2-x_3-3x_4 \leq 2,$

$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 2,\ x_4 \geq 0.$

4. $Z=15x_1-x_2+6x_3+5x_4 \longrightarrow \max,$

$8x_1-9x_2-3x_3+4x_4 \leq 5,$

$5x_1-x_2+3x_4=3,$

$-2x_2+4x_3+x_4 \geq -7,$

$x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 1.$

5. $Z=3x_1-13x_2+9x_3-x_4 \longrightarrow \max,$

$2x_1+x_2-10x_3+6x_4 \leq 10,$

$-8x_1+x_2+2x_3-4x_4 \geq -3,$

$3x_2+x_3+5x_4=13,$

$x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0.$

6. $Z=9x_1-12x_2+x_3-7x_4 \longrightarrow \min,$

$6x_1+2x_2-4x_3-x_4=9,$

$-x_1+x_2-3x_3+6x_4 \geq -1,$

$3x_2-x_3+5x_4 \leq 5,$

$x_1 \geq 1,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0.$

7. $Z=4x_1+3x_2-9x_3+4x_4 \longrightarrow \max,$

$5x_1-6x_2+x_3-3x_4 \leq 10,$

$-x_1+5x_2-2x_3+7x_4 \geq -2,$

$3x_1+x_2+14x_3=6,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_4 \geq 2.$

8. $Z=6x_1-7x_2+9x_3-5x_4 \longrightarrow \min,$

$3x_1+8x_3-x_4=5,$

$-5x_1+2x_2-4x_3+3x_4 \leq 8,$

$6x_2+9x_3-x_4 \geq -2,$

$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 2.$

9. $Z=5x_1-4x_2+2x_3+3x_4 \longrightarrow \max,$

$-2x_1+x_2+9x_3 \geq -7,$

$x_1-7x_2+3x_3-x_4 \leq 10,$

$2x_1-x_2+2x_3+x_4=6,$

$x_1 \geq 3,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

2 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 2

Завдання

Звести до стандартної форми канонічну задачу лінійного програмування

$$Z = x_1 + x_2 + 5x_3 \longrightarrow max,$$

$$x_1 + x_2 + 4\,x_3 + 2x_4 = 2,$$

$$x_1 - x_2 - \;2x_3 \qquad = 0,$$

$$x_j \geq 0,\, j = 1{,}4.$$

Розв”язання

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідність із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Розподіл змінних канонічної задачі на базисні та небазисні (вільні)	В наведеній задачі число змінних n = 4, а ранг системи обмежень r = 2. Виберемо за базисні змінні x_1 та $x_{2.}$ Тоді вільними змінними будуть x_3 *і* x_4.
2	Вираз базисних змінних через небазисні.	$x_1 =1 - x_3 - x_4 \geq 0,$ $x_2 = 1 - 3x_3 - x_4 \geq 0.$
3	Вираз цільової функції через небазисні змінні.	$Z' = x_3 - 2x_4 + 2 \longrightarrow max.$
4	Запис стандартної ЗЛП та встановлення її еквівалентності вихідній канонічній задачі	$Z' = x_4 - 2x_4 + 2 \longrightarrow max,$ $x_3 + x_4 \leq 1,$ $3x_3 + x_4 \leq 1,$ $x_3 \geq 0,\, x_4 \geq 0.$ Нехай $x_3 = 1/3,\;\; x_4 = 0,$ тоді Z'=7/3. Підставляючи ці значення в п.2, знаходимо

		вектор X = (2/3,0,1/3,0), котрий задовольняє умовам вихідної ЗЛП, причому Z =7/3 .Отже, розглядувані канонічна ЗЛП та її запис у стандартній формі еквівалентні між собою.

Зауваження: Вибір різних наборів базисних та вільних змінних приведе до різних записів стандартної задачі відносно вихідної канонічної. Таких форм не більш, ніж $C^r_n = n!/r!(n-r)!$.

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 2.1

Запишіть стандартну ЗЛП з канонічної форми запису та покажіть їх еквівалентність, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \longrightarrow \max$,
$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 17$,
$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -9$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

1. $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \longrightarrow \min$,
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3$,
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

2. $Z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \longrightarrow \max$,
$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 4$,
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

3. $Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max$,
$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$,
$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

4. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \max$,
$x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6$,
$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

5. $Z = x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max$,
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$,
$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

6. $Z = 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \longrightarrow \max$,
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7$,
$x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

7. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \longrightarrow \max$,
$5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41$,
$-x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 3$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

8. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \longrightarrow \max$,
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$,
$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

9. $Z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \longrightarrow \min$,
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$,
$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9$,
$x_j \geq 0,\ j = 1,4$.

3 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 3

Завдання

Розв”язати ЗЛП за допомогою геометричної інтерпретації

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow max,$$

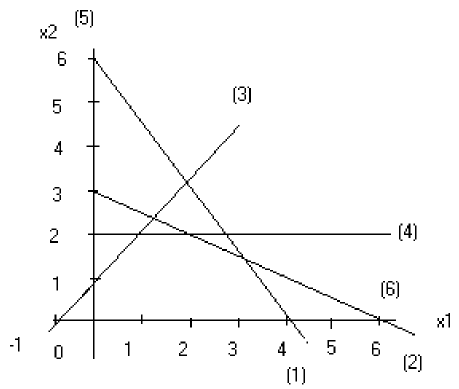
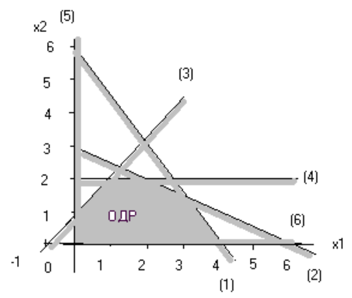
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24, && (1) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, && (2) \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, && (3) \\ x_2 &\leq 2, && (4) \\ x_1 &\geq 0, && (5) \\ x_2 &\geq 0. && (6) \end{aligned}$$

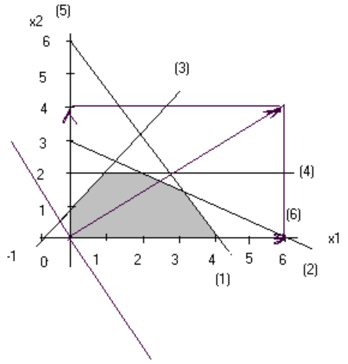
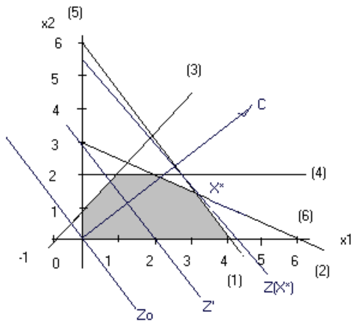
Розв”язання

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідність із даного завдання.

<table>
<tr><th>№</th><th>Алгоритм</th><th>Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Заміна в обмеженнях – нерівностях знаків нерівностей на знаки рівнянь та побудова на площині відповідних прямих.</td><td>Побудова на площині $x_1 0 x_2$ прямих

$$6x_1 + 4x_2 = 24, \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 = 6, \qquad (2)$$
$$-x_1 + x_2 = 1, \qquad (3)$$
$$x_2 = 2, \qquad (4)$$
$$x_1 = 0, \qquad (5)$$
$$x_2 = 0. \qquad (6)$$


</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Визначення півплощин, що відповідають кожно - му обмеженню-нерівнос- ті, та відшукання много- гранника планів задачі (області допустимих роз- в”язків).</td><td>
</td></tr>
</table>

3	Побудова лінії рівня цільової функції	
4	Паралельне пересування прямої рівня в напрямі зростання (спадання) цільової функції до границі ОДР	
5	Знаходження точки (або точок), де пряма рівня досягає найбільшого (найменшого) значення, або встановлення факту нерозв”язності ЗЛП	Пряма рівня досягає найбільшого значення в точці X*.
6	Обчислення координат точки розв”язку ,яка й буде оптимальним планом, та значення цільової функції	В точці X* перетинаються дві прямі (1) та (2). Координати точки X* знаходяться з розв”язання системи рівнянь $6x_1 + 4x_2 = 24,$ $x_1 + 2x_2 = 6.$ Отже, $x_1 = 3$, $x_2 = 3/2$. Записуємо розв”язок задачі X* = (3,3/2) – оптимальний план, а найбільше значення цільової функції Z(X*) = 5×3 + 4×3/2 = 21.

Розв”яжіть самостійно:

Завдання3.1

Роз”яжіть за допомогою геометричної інтерпретації ЗЛП, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = 2x_1 - x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \le 4, \\ &2x_1 + x_2 \ge 10, \\ &-x_1 + 2x_2 \le 6, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

1. $Z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 + x_2 \ge 5, \\ &x_1 - x_2 \le 1, \\ &2x_1 + x_2 \le 6, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

2. $Z = x_1 - x_2 \longrightarrow \min,$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \ge 2, \\ &x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ &-x_1 + 4x_2 \le 7, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3. $Z = x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min,$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ &-2x_1 + x_2 \ge -1, \\ &3x_1 + x_2 \ge 3, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4. $Z = 2x_1 - x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 8, \\ &-2x_1 + x_2 \le -1, \\ &-x_1 + x_2 \ge 0, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

5. $Z = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \min,$

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \le 1, \\ &-3x_1 + x_2 \le 0, \\ &2x_1 - x_2 \le 0, \\ &-2x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

6. $Z = 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &-3x_1 + 2x_2 \le -6, \\ &x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ &3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

7. $Z = 6x_1 + 4x_2 \longrightarrow \min,$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \ge 3, \\ &x_1 - x_2 \le 1, \\ &-x_1 + 2x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

8. $Z = 2x_1 - x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ &-4x_1 + 3x_2 \ge -12, \\ &7x_1 + 4x_2 \le 28, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

9. $Z = -2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 \le 4, \\ &-3x_1 + x_2 \le 3, \\ &-x_1 + x_2 \le 5, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

4 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 4

Розв”язати за допомогою симплекс – методу задачу лінійного програмування

$$Z = -x_1 + x_2 + 4x_3 \longrightarrow max,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 3,$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідь із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Приведення вихідної задачі до канонічної форми запису	Ввести в обмеження – нерівності додаткові невід”ємні змінні x_4 та x_5, які в цільову функцію увійдуть з нульовими коефіцієнтами. Канонічна задача має бути такою $Z = -x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 \longrightarrow max,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 0x_5 = 3,$ $2x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 = 1,$ $x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$
2	Знаходження базису початкового опорного плану	Вектори P_4 та P_5 одиничні, лінійно незалежні й утворюють базис опорного плану $X_o = (0,0,0,3,1)$.

<table>
<tr><td>3</td><td>Складання початкової симплекс – таблиці</td><td>
<table>
<tr><td>i</td><td>Б</td><td>C</td><td>X_0</td><td>-1</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td><td>P_5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_4</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>-3</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>m + 1</td><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>-4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Проведення аналізу з метою встановлення або оптимальності опорного плану, або нерозв”язності задачі, або переходу до нового опорного плану</td><td>Оскільки оцінки векторів P_2 та P_3 від”ємні, план X_o не є оптимальним, але можна перейти до кращого опорного плану, тому що серед компонент цих векторів є додатні компоненти.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Визначення ведучого стовпця, ведучого рядка та ведучого елемента</td><td>Серед оцінок векторів умов вибираємо найменшу від”ємну оцінку Δ_3= -4, отже вектор P_3 треба ввести в базис.Стовпець, що відповідає цьому вектору, буде ведучим. З базису виводимо вектор P_5, для якого θ= = min (1:4) = ¼. Рядок 2 таблиці буде ведучим, елемент, що стоїть на їх перетині, x_{23}=4 буде ведучим елементом.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Заповнення наступної симплекс – таблиці</td><td>
<table>
<tr><td>i</td><td>P</td><td>C</td><td>X_1</td><td>-1</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td><td>P_5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_4</td><td>0</td><td>15/4</td><td>5/2</td><td>5/4</td><td>0</td><td>1</td><td>3/4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_3</td><td>4</td><td>1/4</td><td>1/2</td><td>-1/4</td><td>1</td><td>0</td><td>1/4</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>-2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Перехід до п.4 даного алгоритму</td><td>План X_1= (0,0,1/4,15/4,0) неоптимальний, оскільки є від”ємна оцінка для вектора P_2 у m+1-му рядку.Вводимо в базис вектор P_2, а з базису виводимо вектор P_4, для якого θ=min(15/4:5/4) = 3, і заповнюємо наступну таблицю.
<table>
<tr><td>i</td><td>P</td><td>C</td><td>X_2</td><td>-1</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td><td>P_5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>4/5</td><td>3/5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_3</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1/5</td><td>2/5</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>7</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>8/5</td><td>11/5</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Проведення аналізу з метою встановлення або оптимальності опорного плану, або нерозв”язнос-</td><td>Оскільки усі оцінки векторів умов невід”ємні, то план X_2*=(0,3,1) є оптимальним для вихідної задачі, а цільова функція приймає на ньому значення Z(X*) = 7.</td></tr>
</table>

	ті задачі, або переходу до нового опорного плану	

Розв"яжіть самостійно:

Завдання 4.1

Розв"яжіть за допомогою симплекс – методу ЗЛП, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 1000, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 &\le 150, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

1. $Z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 750, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &\le 1500, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 900, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

2. $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + \qquad 2x_4 &\le 800, \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 &\le 300, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

3. $Z = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 900, \\ 4x_1 \qquad + x_3 + 4x_4 &\le 800, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

4. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 &\le 400, \\ 5x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 900, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

5. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad + x_3 + 4x_4 &\le 900, \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 750, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 1200, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

6. $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 900, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 750, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

7. $Z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 750, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &\le 900, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\le 1200, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

8. $Z = 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 800, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 600, \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 1500, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

9. $Z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &\le 800, \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &\le 750, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\le 1000, \\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4. \end{aligned}$$

5 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 5

Розв"язати задачу лінійного програмування методом штучного базису

$$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 \longrightarrow min,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6,$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 14,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідь із даного завдання.

<table>
<tr><th>№</th><th>Алгоритм</th><th>Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Введення штучних змінних та запис розширеної задачі лінійного програмування (М-задачі)</td><td>Записати вихідну задачу в канонічній формі запису
$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 0x_5 \longrightarrow min,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6,$
$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10,$
$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$
Ввести дві штучні змінні $x_6 \geq 0$ та $x_7 \geq 0$ відповідно в перше та друге рівняння, оскільки третьою базисною змінною буде $x_5 \geq 0$; в цільову функцію штучні змінні ввести з коефіцієнтом +М.
Розширена задача (М-задача) набуває такого вигляду:
$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 0x_5 + M(x_6 + x_7) \longrightarrow min,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 6,$
$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 10,$
$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 7.$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Розв”язання М-задачі за допомогою симплексного методу</td><td>Для початкового опорного плану X_0= =(0,0,0,0,14,6,10) заповнюємо симплекс-таблицю
<table>
<tr><td>i</td><td>Б</td><td>С</td><td>X_0</td><td>2</td><td>-1</td><td>3</td><td>-7</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td><td>P_5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_6</td><td>M</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_7</td><td>M</td><td>10</td><td>4</td><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>P_5</td><td>0</td><td>14</td><td>-1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>0</td><td>-2</td><td>1</td><td>-3</td><td>7</td><td>0</td></tr>
<tr><td>m+2</td><td></td><td></td><td>16</td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>
План X_0 не є оптимальним, оскільки оцінки векторів умов додатні. Максимальна оцінка відповідає вектору P_1, введемо його до базису замість вектора P_7. Маємо наступну таблицю
<table>
<tr><td>i</td><td>Б</td><td>С</td><td>X_1</td><td>2</td><td>-1</td><td>3</td><td>-7</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td><td>P_5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_6</td><td>M</td><td>7/2</td><td>0</td><td>9/4</td><td>-1/4</td><td>13/4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_1</td><td>2</td><td>5/2</td><td>1</td><td>-1/4</td><td>1/4</td><td>-1/4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>P_5</td><td>0</td><td>33/2</td><td>0</td><td>11/4</td><td>9/4</td><td>3/4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>5</td><td>0</td><td>1/2</td><td>-5/2</td><td>13/2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>m+2</td><td></td><td></td><td>7/2</td><td>0</td><td>9/4</td><td>-1/4</td><td>13/4</td><td>0</td></tr>
</table>
Серед оцінок векторів умов є додатні, тому план X_1 неоптимальний. Найбільша оцінка відповідає вектору P_4, введемо його в базис, виключивши з базису згідно симплекс-відношенню вектор P_6. Приходимо до такої таблиці</td></tr>
</table>

i	Б	C	X_2	2	-1	3	-7	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_4	-7	14/13	0	9/13	-1/13	1	0
2	P_1	2	36/13	1	-1/13	3/13	0	0
3	P_5	0	204/13	0	20/13	30/13	0	1
m+1			-2	0	-4	-2	0	0

Штучні змінні виведені з базису, всі оцінки векторів умов у m+1-му рядку недодатні, тому план X_2 = (36/13, 0, 0, 14/13) є оптимальним планом вихідної задачі, на якому цільова функція приймає значення $Z(X^*) = -2$.

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 5.1

Розв”яжіть за допомогою методу штучного базису ЗЛП, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6,$
$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

1. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

2. $Z = 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \longrightarrow \max,$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,$
$x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

3. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
$x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

4. $Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 17,$
$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -9,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

5. $Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \longrightarrow \max,$
$5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41,$
$-x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

6. $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

7. $Z = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \longrightarrow \max,$
$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

8. $Z = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 1,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

9. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \max,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5,$
$2x_1 - x_3 + x_4 = 1,$
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

6 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 6

Побудувати двоїсту задачу до наступної задачі лінійного програмування:

$$Z = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \longrightarrow max,$$
$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \ge 4, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{array}$$

Розв"язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму конкретну відповідь із даного завдання.

<table>
<tr><th>№</th><th>Алгоритм</th><th>Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Запис вихідної задачі у формі однородних нерівностей та рівностей</td><td>Оскільки вихідна задача на максимум, усі обмеження повинні мати знак ≤ та =.Тому, помноживши друге та четверте обмеження – нерівності на (-1), маємо
$Z = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \longrightarrow max,$
$2x_1 - x_2 \le 1,$
$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \le -4,$
$x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$-x_1 + x_3 - 2x_5 \le -3,$
$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Знаходження транспонованої матриці основних обмежень вихідної задачі</td><td>Позначимо перетворену матрицю обмежень вихідної задачі через
$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$
Тоді
$A^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Запис двоїстої задачі на підставі правил запису двоїстих задач у загальній формі</td><td>Введемо вектор змінних двоїстої задачі $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ і запишемо двоїсту задачу:
$T = \lambda_1 - 4\lambda_2 \quad -3\lambda_4 \longrightarrow min,$
$2\lambda_1 - \lambda_2 \quad -\lambda_4 \ge 1,$</td></tr>
</table>

		$-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \quad =-10,$ $-2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \geq 2,$ $\lambda_2 - \lambda_3 \quad =-1,$ $\lambda_2 \quad -2\lambda_4=7,$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_4 \geq 0.$

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 6.1

Запишіть двоїсту задачу лінійного програмування до загальної форми запису задачі, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки (див. Завдання 1.1).

7 Приклад виконання вправи тренінгу на уміння № 7

Дослідити на оптимальність план X =(1,1,0) для наступної задачі лінійного програмування:

$$Z = x_1 + 8x_2 + 10_3 \longrightarrow max,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0,$$

$$x_j \ge 0,\ j=1 \div 3.$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Побудова двоїстої задачі	$T = 2\lambda_1 \longrightarrow min,$ $\lambda_1+\lambda_2 \ge 1,$ $\lambda_1-\lambda_2 \ge 8,$ $4\lambda_1+2\lambda_2 \ge 10,$ $\lambda_2 \ge 0.$
2	Розв”язування обмежень двоїстої задачі у формі рівностей, що відповіда - ють додатним компо-нентам плану, що розглядається	Оскільки перша та друга компоненти плану додатні, то перше та друге обмеження двоїстої задачі повинні виконуватися як рівності: $\lambda_1+\lambda_2=1,$ $\lambda_1-\lambda_2=8.$ Їх розв”язок дає $\lambda=(9/2,-7/2).$
3	Перевірка обмежень дво-їстої задачі, що залиши - лись, на виконання як точних нерівностей	Цей розв”язок не задовольняє четвертому обмеженню двоїстої задачі, тому досліджуваний план X=(1,1,0) не є оптимальним планом.

Розв”жіть самостійно:

Завдання 7.1

Перевірте на оптимальність плани задач лінійного програмування, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \longrightarrow max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (0,1,0\ 1).$

1. $Z = 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \longrightarrow max,$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,$
$x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (0,1,2,0).$

2. $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \longrightarrow min,$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,$
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (2,1,0,0).$

3. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \longrightarrow max,$
$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7,$
$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 3.$
$X = (0,1/2,1/2).$

4. $Z = x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 - 3x_5 \longrightarrow max,$
$x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 = -1,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 5.$
$X = (0,0,1,1,0).$

5. $Z = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \longrightarrow max,$
$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (1,0,0,1).$

6. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \longrightarrow min,$
$x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (2,2,0,0).$

7. $Z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \longrightarrow max,$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9,$
$x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4.$
$X = (1,0,1,0).$

8. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow max,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5,$

9. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \longrightarrow max,$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19,$

$2x_1 \quad - x_3 + x_4 = 1,$

$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

$X = (3,0,2,0).$

$x_1 - x_2 \quad + x_4 + 2x_5 = 2,$

$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 5.$

$X = (0,0,1,2,0).$

8 Приклад виконання вправи тренінгу №8

Перевірити, чи є запропонована пара векторів оптимальним розв"язком прямої та двоїстої до неї задачі:

$X = (0, 9/4, 0, 7/4);$

$\lambda = (11, 9/4);$

$Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \rightarrow \max,$

$3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3,$

$x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \leq 5,$

$x_j \geq 0,\ j = 1 \div 4.$

Розв"язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Побудувати двоїсту задачу	$T = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \to \min$, $3\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$, $-\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4$, $\lambda_1 \geq 1$, $3\lambda_1 - \lambda_2 \geq 6$, $\lambda_2 \geq 0$.
2	Перевірити плани на допустимість	$3\times0 - 1\times9/4 + 1\times0 + 3\times7/4 = 3$, $1\times0 + 3\times9/4 \quad - 1\times7/4 = 5$. Отже, план X є допустимим планом прямої задачі. $3\times11/4 + 1\times9/4 = 21/2>3$, $-1\times11/4 + 3\times9/4 = 4=4$, $11/4>1$, $3\times11/4 - 1\times9/4 = 6=6$, $9/4>0$. План λ є допустимим планом двоїстої задачі.
3	Перевірити плани на оптимальність	$Z = 3\times0 + 4\times9/4 + 1\times0 + 6\times7/4 = 78/4$. $T = 3\times11/4 + 5\times9/4 = 78/4$. Оскільки запропоновані плани є допустимими й значення цільових функцій задач на них збігаються, вони є оптимальними планами розглядуваних задач.

Розв"яжіть самостійно:

Завдання 8.1

Визначте, чи є запропонована пара векторів оптимальним розв"язком прямої та двоїстої до неї задач, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$,
$2x_1 + 3x_2 \leq 15$,
$x_1 + 2x_2 \geq 6$,
$x_1 + x_2 \leq 8$,
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$,
$X = (0,5)$;
$\lambda = (2/3, 0,0)$.

1. $Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$,
$-2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -12$,
$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 16$,
$x_j \geq 0,\ j=1\div3$,
$X = (6,0,0)$;
$\lambda = (3/2,0)$.

2. $Z = 5x_1 - 2x_2 \to \max$,
$5x_1 + 3x_2 \geq 10$,
$2x_1 + 6x_2 \geq 12$,
$-2x_1 + x_2 \leq 4$,
$0 \leq x_1 \leq 8$,
$0 \leq x_2 \leq 6$,
$X = (8,0)$;
$\lambda = (0,0,0,5,0)$.

3. $Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$,
$x_1 + x_2 \leq 4$,
$3x_1 + x_2 \geq 4$,
$0 \leq x_1 \leq 3$,
$0 \leq x_2 \leq 3$,
$X = (1,3)$;
$\lambda = (3,0,0,0)$.

4. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$,
$2x_1 + 3x_2 \leq 15$,
$x_1 + 2x_2 \geq 6$,
$x_1 + x_2 \leq 8$,
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$,

5. $Z = 5x_1 - 2x_2 \to \max$,
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$,
$2x_1 + 5x_2 \geq 10$,
$-2x_1 + x_2 \leq 4$,
$x_1 \leq 6$,
$x_2 \leq 6$,

$X=(5/7,2/7)$;

$\lambda=(1/7,12/7,0,0)$.

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,$

$X=(6,0)$;

$\lambda=(0,0,0,5,0)$.

6. $Z = 5\lambda_1 + 6\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \rightarrow \min,$

$$\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \geq 7,$$
$$-\lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_3 - \lambda_4 \leq 2,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i=1\div 4,$$

$\lambda=(17/5,9/5,0,0)$;

$X=(21/5,4/5)$.

7. $Z = 4\lambda_1 - 4\lambda_2 - 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 3\lambda_5 \rightarrow \min,$

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \geq 3,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 - \lambda_5 \leq -3,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i=1\div 5,$$

$\lambda=(3,0,0,0,0)$;

$X=(3,1)$.

8. $Z = 3\lambda_1 + 42\lambda_2 + 6\lambda_3 - 4\lambda_4 \rightarrow \min,$

$$\lambda_1 - 6\lambda_2 - 2\lambda_3 + 4\lambda_4 \leq -2,$$
$$\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \geq 1,$$
$$\lambda i \geq 0,\ i=1\div 4,$$

$\lambda=(0,1/4,1/4,0)$;

$X=(21/4,3/2)$.

9. $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 4,$$
$$-5x_1 + x_3 \geq -12,$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -4,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1\div 3,$$

$X=(16/7,4/7,0)$;

$\lambda=(4/7,0,5/7)$.

9 Приклад виконання вправи тренінгу №9

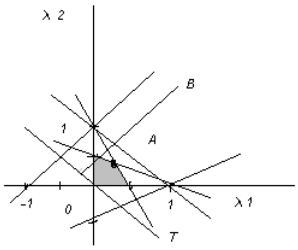
Розв”язати наступну задачу лінійного програмування, використовуючи геометричну інтерпретацію двоїстої задачі:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min,$$

$$x_1+2x_2 - x_3 + x_4 \geq 1,$$
$$2x_1+ x_2 + x_3 -2x_4 \geq 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1\div 4.$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

<table>
<tr><td>№</td><td>Алгоритм</td><td>Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Побудувати двоїсту задачу</td><td>$$T = \lambda_1 + \lambda_2 \longrightarrow \max,$$ $$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1,$$ $$2\lambda_1+ \lambda_2 \leq 1,$$ $$-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1,$$ $$\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 1,$$ $$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0.$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Знаходження розв”язку двоїстої задачі</td><td>

Цільова функція двоїстої задачі *T* досягає максимуму в точці *A*,
де $\lambda^* = (1/3,1/3)$. Отже, $T(\lambda^*) = Z(X^*) = 2/3$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Знаходження розв”язку прямої задачі з умов доповнюючої нежорскості</td><td>Запишемо умови доповнюючої нежорскості:
$$x_1(1-\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0,$$ $$x_2 (1-2\lambda_1 -\lambda_2) = 0,$$ $$x_3 (1+ \lambda_1- \lambda_2) = 0,$$ $$x_4(1-\lambda_1 +2\lambda_2) = 0.$$
Звідси маємо $x_1 \neq 0$, оскільки $(\cdot) =0$,
$x_2 \neq 0,\ (\cdot) = 0,$
$x_3 = 0,\ (\cdot) \neq 0,$
$x_4 = 0,\ (\cdot) \neq 0.$
З другої групи умов
$$\lambda_1 (1-x_1-2x_2 +x_3 -x_4) = 0,$$ $$\lambda_2(1-2x_1-x_2 -x_3+2x_4)= 0$$
випливає
$\lambda_1\neq 0$,отже $(\cdot) = 0$,
$\lambda_2\neq 0,\ (\cdot) = 0.$
Розв”язавши систему рівнянь</td></tr>
</table>

		$x_1 + 2x_2 = 1,$ $2x_1 + x_2 = 1,$ знаходимо оптимальний план вихідної задачі $X^*=(1/3,1/3,0,0)$.

Розв"яжіть самостійно:

Завдання 9.1

Знайдіть розв"язок задачі лінійного програмування, використовуючи геометричну інтерпретацію двоїстої задачі. Оберіть варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $Z = 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 \longrightarrow \min,$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 7,$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 2,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

1. $Z = 3x_1 + 42x_2 + 6x_3 - 4x_4 \longrightarrow \min,$
$$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 2,$$
$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

2. $Z = 4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4 \longrightarrow \min,$
$$2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

3. $Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \longrightarrow \max,$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 5,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 5.$$

4. $Z = -2x_3 + 2x_4 + x_5 \longrightarrow \max,$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4,$$
$$x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 5.$$

5. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \longrightarrow \min,$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -10,$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 3.$$

6. $Z = x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 \longrightarrow \max,$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3,$$
$$-x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

7. $Z = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 \longrightarrow \max,$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2,$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

8. $Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min,$
$$1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18,$$
$$3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \geq 24,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

9. $Z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \longrightarrow \min,$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27,$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24,$$
$$x_j \geq 0,\ j=1 \div 4.$$

10 Приклад виконання вправи тренінгу № 10

Розв”язати наступну задачу лінійного програмування двоїстим симплексним методом:

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \longrightarrow \max,$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 11,$$
$$4x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Побудова двоїстої задачі	Представимо вихідну задачу у вигляді $Z = 8x_1 + 6x_2 + 0(x_3 + x_4) \longrightarrow \max,$ $2x_1 + 5x_2 + x_3 \quad = 11,$ $4x_1 + x_2 \quad + x_4 = 10, \; x_j \geq 0, j = 1 \div 4.$ $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_0$ Запишемо двоїсту до неї задачу: $T = 11\lambda_1 + 10\lambda_2 \longrightarrow \min,$ $2\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 8, \; (P_1)$ $5\lambda_1 + \lambda_2 \geq 6, \; (P_2)$ $\lambda_1 \geq 0, \quad (P_3)$ $\lambda_2 \geq 0. \; (P_4)$
2	Визначення спряженого базису	Виберемо за спряжений базис вектори P_3, P_4.Маємо, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Цей базис не можна взяти за спряжений, оскільки не

<table>
<tr><td></td><td></td><td>виконуються перше та друге обмеження двоїстої задачі: $2·0 +4·0≥8$ та $5·0 +1·0≥6$.
Спробуємо взяти спряженим базисом вектори P_2, P_3. Тоді із системи
$$\begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 = 6, \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$
маємо, що $\lambda_2 = 6$.
При цих значеннях λ_1 і λ_2 перша та четверта нерівності двоїстої задачі виконуються, отже, система (P_2, P_3) є спряженим базисом.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Розкладання небазисних векторів вихідної задачі за векторами спряженого базису</td><td>$$P_0 = P_2x_{20} + P_3x_{30};$$
$$11 = 5x_{20} + x_{30},$$
$$10 = x_{20} + 0x_{30};$$
$$x_{20} = 10,\ x_{30} = -39.$$
$$P_1 = P_2x_{21} + P_3x_{31};$$
$$2 = 5x_{21} + x_{31},$$
$$4 = x_{21} + 0x_{31};$$
$$x_{21} = 4,\ x_{31} = -18.$$
$$P_4 = P_2x_{24} + P_3x_{34};$$
$$0 = 5x_{24} + x_{34},$$
$$1 = x_{24} + 0x_{34};$$
$$x_{24} = 1,\ x_{34} = -5.$$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Запис вихідної задачі за умов спряженого базису</td><td>$$Z = 8x_1 + 6x_2 + 0(x_3 + x_4) \longrightarrow \max,$$
$$4x_1 + x_2 + x_4 = 10,$$
$$-18x_1 + x_3 - 5x_4 = -39,$$
$$x_j \geq 0, j = 1 \div 4.$$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Складання початкової симплекс-таблиці</td><td><table>
<tr><td rowspan="2">i</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">С</td><td rowspan="2">$\overline{X}$</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_2</td><td>6</td><td>10</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_3</td><td>0</td><td>-39</td><td>-18</td><td>0</td><td>1</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td colspan="2"></td><td>60</td><td>16</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Перевірка псевдоплану або на оптимальність, або на нерозв”язність задачі, або на перехід до нового псевдоплану</td><td>Псевдоплан $\overline{X}=(0,10,-39,0)$ не є розв”язком вихідної задачі, але можна перейти до іншого псевдоплану, оскільки у другому рядку симплекс-таблиці є від”ємні елементи.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Визначення ведучого рядка, ведучого стовпця та ведучого елемента</td><td>У стовпці $\overline{X}$ симплекс-таблиці є один від”ємний елемент, тому вектор P_3 треба вивести з базиса, вектор, який треба ввести в базис, визначається із співвідношення
$$\theta = \min(-16/-18, -6/-5) = 8/9,$$
що відповідає вектору P_1. Ведучим елементом буде $x_{21}=-18$.
<table>
<tr><td rowspan="2">i</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">С</td><td rowspan="2">$\overline{X}$</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_2</td><td>6</td><td>10</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><td>2</td><td>P_3</td><td>0</td><td>-39</td><td>-18</td><td>0</td><td>1</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>60</td><td>16</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Заповнення наступної симплекс-таблиці</td><td>
<table>
<tr><td rowspan="2">i</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">С</td><td rowspan="2">X</td><td>8</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>P_2</td><td>P_3</td><td>P_4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P_2</td><td>6</td><td>4/3</td><td>0</td><td>1</td><td>2/9</td><td>-1/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>P_1</td><td>8</td><td>13/6</td><td>1</td><td>0</td><td>-1/18</td><td>5/18</td></tr>
<tr><td>m+1</td><td></td><td></td><td>76/3</td><td>0</td><td>0</td><td>8/9</td><td>14/9</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Перехід до п.6</td><td>Оскільки серед компонент псевдоплану немає від”ємних, то план X*= (13/6,4/3) є оптимальним планом вихідної задачі.</td></tr>
</table>

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 10.1

Розв”яжіть ЗЛП двоїстим симплекс-методом, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $$Z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

1. $$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_j \ge 0, j = 1 \div 3. \end{array}$$

2. $$Z = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 \longrightarrow \min,\quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_j \ge 0, j = 1 \div 4. \end{array}$$

3. $$Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min,\quad \begin{array}{l} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24, \\ x_j \ge 0, j = 1 \div 4. \end{array}$$

4. $$Z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \longrightarrow \min,\quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24, \\ x_j \ge 0, j = 1 \div 4. \end{array}$$

5. $$Z = x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

6. $$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

7. $$Z = 8x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

8. $$Z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max,\quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

9. $$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min,\quad \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 400, \\ x_j \ge 0, j = 1 \div 4. \end{array}$$

11 Приклад виконання вправи тренінгу № 11

Побудуйте опорний план наступної транспортної задачі, що задана матрицею транспортних витрат **C,** об”ємами постачання $a_i, i=1\div m$ та споживання $b_j, j=1\div n$:

$$C=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad a_i=(60,55,40,35), \quad b_j=(70,15,45,45).$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

<table>
<tr><th>№</th><th>Алгоритм</th><th>Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Перевірка виконання балансової умови задачі</td><td>$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$
60+55+40+35 ≠ 70+15+45+45,
190>175.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Введення фіктивного постачальника або споживача в разі її невиконання</td><td>Вводимо додаткового споживача, потреби якого складають
b_5= 190-175=15.
Транспортні витрати між постачальниками та фіктивним споживачем $c_{i,5}, i=1\div 4$ приймаються такими, що дорівнюють нулю.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Запис обмежень Т-задачіу вигляді таблиці-незаповненої матриці перевезень</td><td><table>
<tr><th rowspan="2">П</th><th colspan="5">C</th><th rowspan="2">a_i</th></tr>
<tr><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th><th>B_4</th><th>B_5</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>1</td><td>2</td><td>9</td><td>7</td><td>0</td><td>60</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>55</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>3</td><td>0</td><td>40</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>35</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td>70</td><td>15</td><td>45</td><td>45</td><td>15</td><td>190</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Знаходження опорних планів методами північно-західного кута, мінімального елемента, подвійних позначок, Фогеля</td><td>Опорний план, побудований методом північно-західного кута,
<table>
<tr><td>60</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td><td>30</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>15</td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>20</td><td>15</td></tr>
</table>
Опорні плани, побудовані методами мінімального елемента та подвійних позначок, виявилися однаковими
<table>
<tr><td>45</td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>45</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>35</td><td></td></tr>
</table>
За методом Фогеля опорний план буде таким
<table>
<tr><td>60</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>45</td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

				15		10	15	
						35		

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 11.1

Побудуйте опорні плані транспортної задачі методами північно-західного кута, мінімального елемента, подвійних позначок та Фогеля, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки:

0. $C=\begin{vmatrix} 3 & 25 & 11 & 22 & 12 \\ 9 & 15 & 4 & 26 & 12 \\ 13 & 22 & 15 & 12 & 27 \\ 6 & 19 & 8 & 11 & 8 \end{vmatrix}$ a_i=(23,25,12,20) b_j=(18,18,17,19,18)

1. $C=\begin{vmatrix} 22 & 24 & 25 & 23 & 29 \\ 1 & 21 & 10 & 7 & 19 \\ 2 & 26 & 18 & 30 & 27 \\ 22 & 10 & 29 & 26 & 23 \end{vmatrix}$ a_i=(24,14/19,17) b_j=(22,9,12,13,18)

2. $C=\begin{vmatrix} 6 & 11 & 20 & 17 & 8 \\ 1 & 25 & 3 & 18 & 17 \\ 9 & 39 & 16 & 30 & 31 \\ 23 & 15 & 4 & 3 & 28 \end{vmatrix}$ a_i=(12,17,18,13) b_j=(10,8,12,14,16)

3. $C=\begin{vmatrix} 21 & 17 & 12 & 24 & 30 \\ 6 & 11 & 9 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 24 & 6 & 13 \\ 29 & 22 & 21 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ a_i=(19,19,17,21) b_j=(15,14,16,15,15)

4. $C=\begin{vmatrix} 7 & 10 & 16 & 27 & 19 \\ 30 & 18 & 8 & 29 & 15 \\ 3 & 18 & 28 & 19 & 15 \\ 9 & 12 & 2 & 25 & 21 \end{vmatrix}$ a_i=(17,19,11,13) b_j=(5,15,11,9,20)

5. $C=\begin{vmatrix} 4 & 21 & 12 & 9 & 1 \\ 20 & 8 & 25 & 15 & 23 \\ 17 & 1 & 11 & 5 & 3 \\ 23 & 10 & 24 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ a_i=(21,23,21,23) b_j=(22,11,22,22,11)

6. $C=\begin{vmatrix} 14 & 5 & 27 & 29 & 23 \\ 17 & 7 & 16 & 19 & 2 \\ 20 & 12 & 15 & 29 & 5 \\ 21 & 19 & 18 & 7 & 13 \end{vmatrix}$ a_i=(18,14,16,12) b_j=(8,11,11,9,21)

7. $C=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 24 & 19 & 25 \\ 30 & 2 & 22 & 16 & 7 \\ 30 & 24 & 27 & 29 & 10 \\ 15 & 17 & 21 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ a_i=(24,15,16,24) b_j=(12,13,14,31,9)

8. $C=\begin{vmatrix} 21 & 19 & 11 & 12 & 12 \\ 26 & 29 & 14 & 1 & 26 \\ 39 & 1 & 22 & 8 & 26 \\ 33 & 23 & 40 & 26 & 28 \end{vmatrix}$ a_i=(24,12,18,16) b_j=(11,13,26,10,10)

9. $C=\begin{vmatrix} 19 & 9 & 14 & 17 & 9 \\ 4 & 21 & 27 & 8 & 29 \\ 22 & 30 & 4 & 1 & 24 \\ 10 & 22 & 8 & 5 & 27 \end{vmatrix}$ a_i=(17,17,16,10) b_j=(10,8,7,11,24)

12 Приклад виконання вправи тренінгу №12

Знайдіть розв”язок Т-задачі методом потенціалів:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix},$$

$$a_i=(30,50,20),$$

$$b_j=(15,15,40,30).$$

Розв”язання:

Попереду заповните таблицю, підібравши до кожного алгоритму відповідь із даного завдання.

№	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	Запис системи обмежень Т-задачі у вигляді таблиці	Перевіряєм виконання балансових умов: 30+50+20 = 15+15+40+30. Маємо закриту транспортну задачу.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><td rowspan="2">П</td><td colspan="4">С</td><td rowspan="2">a_i</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>1</td><td>8</td><td>2</td><td>3</td><td>30</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>4</td><td>7</td><td>5</td><td>1</td><td>50</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td>15</td><td>15</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Побудова опорного плану</td><td>Опорний план побудовано методом північно-західного кута (далі наведені фрагменти транспортних таблиць):
<table>
<tr><td>$15^{\,1}$</td><td>$15^{\,8}$</td><td>^{2}</td><td>^{3}</td><td>30</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>^{7}</td><td>$40^{\,5}$</td><td>$10^{\,1}$</td><td>50</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>^{3}</td><td>^{4}</td><td>$20^{\,4}$</td><td>20</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Перевірка плану на невиродженість та ацикліч - ність</td><td>Побудований опорний план вироджений, так як число базисних компонент $n+m-1\neq6$.У клітинку (3,2) введемо фіктивне перевезення ε=0. Як результат, будемо мати ациклічний невироджений опорний план:
<table>
<tr><td>$15^{\,1}$</td><td>$15^{\,8}$</td><td>^{2}</td><td>^{3}</td><td>30</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>^{7}</td><td>$40^{\,5}$</td><td>$10^{\,1}$</td><td>50</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>$\varepsilon^{\,3}$</td><td>^{4}</td><td>$20^{\,4}$</td><td>20+ε</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15+ε</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Утворення системи рівнянь для визначення потенціалів</td><td>Поставимо у відповідність постачальникам потенціали $u_{i,}$, а споживачам v_j .Для базисних клітинок (їх 6) запишемо систему рівнянь:
$u_1 + v_1=1,$
$u_1 +v_2=8,$
$u_2 +v_3=5,$
$u_2 +v_4=1,$
$u_3 +v_2=3,$
$u_3 +v_4=4.$
Поклавши один із потенціалів, наприклад $u_1=0,$ знаходимо значення решти інших:$u_2=-8,u_3=-5,$ $v_1=1,v_2=8,v_3=13,v_4=9.$(Цей роз”вязок можна знайти безпосередньо на транспортній таблиці.)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Перевірка опорного плану на оптимальність</td><td>Для всіх клітинок обчислюємо u_i+v_j і записує - мо ці значення у правий кут кожної клітинки:
<table>
<tr><td>^{1} 15 ^{1}</td><td>^{8} 15 ^{8}</td><td>^{13} ^{2}</td><td>^{9} ^{3}</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$^{-7}$ ^{4}</td><td>^{0} ^{7}</td><td>^{5} 40 ^{5}</td><td>^{1} 10 ^{1}</td><td>-8</td></tr>
<tr><td>$^{-4}$ ^{6}</td><td>^{3} 15+ε ^{3}</td><td>^{8} ^{4}</td><td>^{4} 20 ^{4}</td><td>-5</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
<table>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>13</td><td>9</td><td>$v_j \backslash u_i$</td></tr>
</table>
Оскільки друга умова потенціальності плану не виконується (клітинки (1,3),((1,4),(3,3)), вибираємо клітинку з найбільшим порушенням. Це клітинка (1,3),для якої ціна циклу γ_{13}=2-13= = -11.Будуємо для неї цикл із клітинок (1,3), (2,3),(2,4),(3,4),(3,2):
<table>
<tr><td>15 ^{1}</td><td>- ^{8}
15 ---</td><td>+ ^{2}
----</td><td>^{3}</td><td>30</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>| ^{7}
|</td><td>- ^{5}
|
40 ---</td><td>+ ^{1}
--- 10</td><td>50</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>+ ^{3}
|
ε ---</td><td>^{4}
---------</td><td>- ^{4}
|
--- 20</td><td>20+ε</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15+ε</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
За цим циклом треба перекинути θ=min(15,40,20)=15 одиниць вантажу.
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Перехід до нового опорного плану, ближчого до оптимального</td><td>
<table>
<tr><td>15 ^{1}</td><td>^{8}</td><td>15 ^{2}</td><td>^{3}</td><td>30</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>^{7}</td><td>25 ^{5}</td><td>25 ^{3}</td><td>50</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>15+ε ^{3}</td><td>^{4}</td><td>5 ^{4}</td><td>20+ε</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15+ε</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Перехід до п.3</td><td>Новий опорний план ациклічний, невироджений, тому можна покласти ε=0.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Повторення п.п.4-7 доти, поки не буде знайдено оптимальний план</td><td>
п.4
<table>
<tr><td>15 ^{1}</td><td>^{8}</td><td>15 ^{2}</td><td>^{3}</td><td>0</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>^{7}</td><td>25 ^{5}</td><td>25 ^{1}</td><td>3</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>15 ^{3}</td><td>^{4}</td><td>5 ^{4}</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-3</td><td>2</td><td>-2</td><td>$v_j \backslash u_i$</td></tr>
</table>
п.5
<table>
<tr><td>^{1} 15 ^{1}</td><td>$^{-3}$ ^{8}</td><td>^{2} 15 ^{2}</td><td>$^{-2}$ ^{3}</td><td>0</td></tr>
<tr><td>^{4} ^{4}</td><td>^{0} ^{8}</td><td>^{5} 25 ^{5}</td><td>^{1} 25 ^{1}</td><td>3</td></tr>
<tr><td>^{7} ^{6}</td><td>^{3} 15 ^{3}</td><td>^{8} ^{4}</td><td>^{4} 5 ^{4}</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-3</td><td>2</td><td>-2</td><td>$v_j \backslash u_i$</td></tr>
</table>
Друга умова потенціальності плану не виконується для клітинок (3,1) і (3,3), найбільше порушення має клітинка (3,3),ціна циклу для якої γ=4-8=-4. Будуємо для неї цикл із клітинок (3,3),((2,3),(2,4) і (3,4). За цим циклом треба перекинути θ=min(25,5)=5 одиниць вантажу.
п.6
<table>
<tr><td>15 ^{1}</td><td>^{8}</td><td>15 ^{2}</td><td>^{3}</td><td>30</td></tr>
<tr><td>^{4}</td><td>^{7}</td><td>20 ^{5}</td><td>30 ^{1}</td><td>50</td></tr>
<tr><td>^{6}</td><td>15 ^{3}</td><td>5 ^{4}</td><td>^{4}</td><td>20</td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>40</td><td>30</td><td></td></tr>
</table>
Не важко пересвідчитися, що цей опорний план буде оптимальним, для якого Z= 240 у.о.
</td></tr>
</table>

Розв”яжіть самостійно:

Завдання 12.1

Знайдіть розв”язок Т-задачі методом потенціалів, обравши варіант за останньою цифрою залікової книжки із завдання 11.1.

ГЛОСАРІЙ

(україно-російський)

Альтернативний розв"язок – (альтернативное решение) в линейном программировании всякое решение, выраженное выпуклой комбинацией оптимальных решений.

Антиградієнт – (антиградиент) вектор, противоположный градиенту функции и направленный в сторону ее наискорейшего убывания.

Багатокритеріальність –(многокритериальность)задачи математического программирования, которые состоят в поиске оптимального решения, удовлетворяющего нескольким несводимым друг к другу критериям.

Базис – (базис) набор из максимального числа линейно-независимых векторов для данного пространства. Все остальные вектора пространства могут быть представлены в виде линейной комбинации базисних векторов.

Базис опорного плану –(базис опорного плана) в линейном программировании система m линейно независимых векторов условий, включающая все те вектора, для которых $x_i>0$.

Базис спряжений – (базис сопряженный) базис опорного плана двойственной (сопряженной) задачи линейного программирования.

Базис штучний –(базис искусственный) исходный базис задачи линейного программирования, состоящий из искусственных векторов.

Базисний розв"язок –(базисное решение) термин линейного программирова – ния, одно из допустимих решений, находящихся в вершинах области допустимих решений.

Балансова умова – (условия баланса) сумма объемов производства на всех m пуктах-поставщиках равна сумме объемов потребления на всех n пунктах-получателях.

Блокування перевезень – (блокирование или запрещение перевозок) в открытых транспортных задачах дополнительное условие, согласно которому отдельные перевозки от определенного поставника к определенному потребителю должны быть исключены.

Ведучий стовпець, ведучий рядок–(ведучий столбец, ведущая строка) элементы алгоритма перебора допустимых базисних решений задачи линейного программирования при ее решении симплексным методом.

Вейерштрасса теорема-(теорема Вейерштрасса) фундаментальная теорема математического программирования, формулирующая условия существования глобального максимума.Заключается в том, что если допустимое множество G является компактным и непустым, то непрерывная целевая функция $F(X)$, определенная на этом множестве, достигает глобального максимума на внутренней или граничной то - чке множества G.

Вектор – (вектор) упорядоченный набор из некоторого количества действительных чисел. Различают вектор-столбец и вектор-строку.

Вироджена задача–(вырожденная задача) задача линейного программирования, в которой при разложении векторов свободных членов ограничений по некоторому базису по крайней мере один коэффициент оказывается равным нулю.

Градієнт–(градиент) вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции равный по величине ее производной в этом направлении.

Гранична точка –(граничная точка) точка, лежащая на границе области допустимых решений.

Двоїста задача –(двойственная,сопряженная задача) каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача,называемая двойственной или сопряженной по отношению к исходной.

Двоїстий симплекс-метод – (двойственный симплекс-метод) решения задач линейного программирования, основанный на переборе опорных планов сопряженной задачи или псевдопланов прямой задачи. Известен как метод последовательного уточнения оценок.

Двоїсті оцінки –(двойственные оценки, объективно обусловленные оценки, теневые цены) «внутренние» цены ресурсов, задаваемые не извне,а определяемые непосредственно в результате решения задачи.

Доповнююча нежорсткість –(дополняющая нежесткость) термин математического программирования. Выполнение этих условий определяет нахождение совместного оптимального решения сопряженных прямой и двойственной задач.

Допустима множина –(допустимое множество, область допустимых решений) понятие математического программирования, область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В линейном программировании ОДР всегда выпукла и всегда находится в неотрицательном подпространстве многомерного (n-мерного) пространства решений(допустимый многогранник).

Допустимий план, допустимий розв'язок –(допустимый план, допустимое решение) такой вариант плана, который удовлетворяет всем ограничениям задачи, но не обязательно оптимальный. В задачах линейного программирования-это любая точка в пределах ОДР.

Евклідовий простір – (Евклидово пространство) многомерное (n-мерное) векторное пространство, векторное (линейное) пространство.

Екстремум функції – (экстремум функции) термин, объединяющий понятия максимума и минимума функции. В задачах математического программирования различают такие виды экстремума: безусловный абсолютный(или глобальный), безусловный относительный(или локальный),условный абсолютный и условный относительный. Под безусловными понимают экстремумы при отсутствии ограничений, под условными– при наличии ограничений.

Загальна задача математичного програмування – (общая задача математического программирования) задача оптимизации целевой функции при наличии ограничений на область изменения переменных.

Задача лінійного програмування–(задача линейного программирования) оптимизационная задача нахождения экстремума линейной функции на множестве, заданном линейными неравенствами и равенствами. Различают общую, стандартную и каноническую формы записи задачи, которые эквивалентны между собой. Большинство постановок производственно-экономических ситуаций приводит к общей или стадартной задачам линейного программирования. Наиболее же широко используемые методы решения ЗЛП применяются лишь к задачам, записанным в канонической форме.

Зациклення –(зацикливание) в вырожденных задачах линейного программирования явление, при котором одно и тоже множество базисных решений будет периодически повторяться, а оптимальный план никогда не будет достигнут.

Змінна –(переменная) в задачах математического программирования неизвестная величина, значение которой нужно определить в результате решения задачи.

Змінна додаткова – (дополнительная переменная) вводится в систему огранитений задачи математического программирования при преобразовании неравенств в равенства. В целевую функцию вводится с коэффициентом, равным нулю. Ее экономический смысл связан с экономическим содержанием задачи.

Змінна штучна – (искусственная переменная) используется при решении задач, не имеющих полный единичный базис, которому соответствует опорное решение.Искусственные переменные вводяться в уравнения, не содержащие базисных перемен - ных. Эти же переменные с большими по абсолютной величине коэффициентами | М | включают в линейную целевую функцию.

Кутова точка – (угловая точка, крайняя точка, вершина ОДР) в задачах линей – ного программирования точка пересечения линейных ограничений. Такая точка не может быть представлена выпуклой линейной комбинацией двух других точек этого выпуклого множества.

Лінія рівня- (линия уровня) геометрическое место точек пространства, для ко - торых значения исследуемой функции одинаковы. Различные константы порождают различные линии уровня.

Метод північно-західного кута – (метод северо-западного угла) метод построения опорного плана транспортной задачи.

Метод потенціалів – (метод потенциалов) общий принцип определения опти - мального плана транспортной задачи, основанный на двойственной транспортной задаче.

Метод штучного базису (М-метод) - (метод искусственного базиса, М-метод) прием, используемый при решении задач линейного программирования симплекс – методом, определение опорного плана которых представляет значительные трудности. Заключается во введении искусственных переменных в уравнения, не содержащие базисных переменных.

Область допустимих розв"язків – см. **Допустима множина.**

Обмеження на пропускні спроможності – (ограничения на пропускные способности) дополнительные ограничения, которые задаются по каждому из маршрутов к закрытой модели транспортной задачи.

План –(план, допустимое решение) совокупность чисел, удовлетворяющих ограничениям задачи математического программирования.

План невироджений –(невырожденный план) если все его компоненты, отвечающие векторам базиса (базисные компоненты) положительны.

План оптимальний – (оптимальный план, решение) при котором целевая функция задачи принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Псевдоплан – (псевлопдан) в задачах линейного программирования решение системы линейных уравнений, среди компонент которого имеются отрицательные числа, если все оценки векторов условий неотрицательны.

Потенціали – (потенциалы) определенный вид оптимальных оценок, включаемых в формулировку транспортной задачи при ее решении методом потенциалов.

Ранг системи обмежень транспортної задачі – (ранг системы ограничений транспортной задачи) всегда на единицу менше числа уравнений.

Розв"язувальний вектор –(разрешающий вектор) в линейном программировании наличие разрешающего вектора является необходимым и достаточным условием оптимальности плана.

Симплекс-метод – (симплекс-метод) решения задач линейного программирования – вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улуч - шения решений – перехода от одной базисной точки к другой, для которой значение целевой функции будет не хуже.Если оптимальное решение существует, то оно объязательно будет найдено через конечное число шагов (за исключением „вырожденной задачи”, при которой возможно явление „зацикливания”).

Симплекс-таблиця – (симплекс-таблица) служит средством перебора допустимых базисных решений задачи линейного программирования при ее решении симп - лексным методом.

Транспортна задача – (транспортная задача, Т-задача) одна из наиболее распространенных задач математического программирования (обычно-линейного). Состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза от поставщиков к потребителям, минимизирующего стоимость перевозок всего груза.

Цикл –(цикл) замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья- вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине встречаются только два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце.

Фіктивні постачальник, споживач-(фиктивные поставщик, потребитель) в открытых транспортных задачах вводятся в модель, чтобы сбалансировать спрос и потребление.